MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

19. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Artin, E., Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. I. (Arithmetischer Teil.) 153

Artin, E., Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. II. (Analytischer Teil.) 207

Bauer, M., Über die Erweiterung des Körpers der p-adischen Zahlen zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper 308

Bell, E. T., Umbral symmetric functions and algebraic analogues of the Bernoullian and Eulerian numbers and functions 35

Bergmann, St., Über die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators 8

Berichtigung von F. Riesz 152

Grandjot, K., Über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung 128

Hamburger, H., Über Kurvennetze mit isolierten Singularitäten auf geschlossenen Flächen 50

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood, Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series 67

Haupt, O., Über Kurven endlicher Ordnung 284

Herglotz, G., Über die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen innerhalb und auf dem Einheitskreis 26

Hilb, E., Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. 3. Mitteilung . . . 136

Kamke, E., Zur Arithmetik der Polynome 247

Knopp, K., Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit 97

Korrektur zu H. Weyl, Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe 152

Littlewood, J. E., and G. H. Hardy, Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier series 67

Ore, Ö., Algebraische Gleichungen mit primitiven Gruppen 276

Popoff, K., Über einige Entwicklungen nach einem System gegebener Funktionen 1

Preisausschreibung 151

Schur, A., Über diejenigen Strahlensysteme, deren Brennflächen durch die Systemstrahlen isometrisch aufeinander bezogen werden 114

Sternberg, W., Die charakteristischen Eigenschaften des logarithmischen Potentials 145

Vietoris, L., Zur Geometrie ebener Massenanziehungsprobleme. (Aus einem Briefe an E. Strömgren in Kopenhagen) 130

Walfisz, A., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden 300

Weinstein, A., Ein hydrodynamischer Unitätssatz 265

Über einige Entwicklungen nach einem System gegebener Funktionen.

Von

Kyrill Popoff in Sofia.

§ 1.

Funktionen reeller Veränderlichen.

1. Sei

$$v_1(x),\ v_2(x),\ \ldots,\ v_n(x),\ \ldots$$

ein System von Funktionen, die sämtlich in dem Intervalle (a, b) stetig sind und die Bedingungen

$$\int_a^b v_m(x)v_n(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b v_n^2(x)\,dx = 1 \qquad (m \neq n)$$

erfüllen. Sei überdies

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots$$

eine andere Folge von stetigen Funktionen, derart bestimmt, daß die Reihen

$$(1) \qquad K(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x)\,v_n(y), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n'(x)\,v_n(y)$$

gleichmäßig in x und y konvergieren, wenn $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$. Hierbei ist

$$\theta_n(x) = \psi_n(x) - v_n(x).$$

Satz I. *Wenn die Funktionen $v_n(x)$ so beschaffen sind, daß sich jede differentiierbare Funktion $\Phi(x)$ durch die Reihe*

$$(2) \qquad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \int_a^b \Phi(x)\,v_n(x)\,dx$$

darstellen läßt, und wenn der Kern $K(x, y)$ nicht Eins als Eigenwert zuläßt, dann kann jede Funktion $F(x)$, die nach der Formel (2) nach den $v_n(x)$ entwickelbar ist, auch nach den $\psi_n(x)$ entwickelt werden.

Um diesen Satz zu beweisen, werden wir versuchen, $F(x)$ in die Form

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(x)$$

zu bringen, worin A_n die Fourierkoeffizienten

$$A_n = \int_a^b f(t) v_n(t)\, dt$$

für eine noch unbestimmt gelassene Funktion $f(x)$ sind. Ersetzt man in dieser Reihe $\psi_n(x)$ durch $\theta_n(x) + v_n(x)$ und bedenkt man, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x) v_n(y)$ gleichmäßig konvergiert, und daß $\sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x)$ die noch unbestimmte Funktion $f(x)$ darstellt, so bekommt man die Integralgleichung

$$F(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t) f(t)\, dt,$$

die

$$f(x) = F(x) + \int_a^b K(x, t; 1) F(t)\, dt$$

liefert, wobei $K(x, y; \lambda)$ der lösende Kern von $K(x, y)$ ist.

Da nach (1) der Kern $K(x, y)$ nebst $\frac{\partial K}{\partial x}$ eine stetige Funktion in x und y ist, wird auch $K(x, y; \lambda)$ und also das Integral

$$\int_a^b K(x, t; 1) F(t)\, dt$$

eine differentiierbare Funktion in x. Demnach läßt sich $f(x)$, als Summe zweier Funktionen, die nach $v_n(x)$ entwickelbar sind, selbst nach $v_n(x)$ entwickeln, was die Gleichsetzung von $\sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x)$ und $f(x)$ rechtfertigt. Die so erhaltene Funktion liefert die gesuchten Koeffizienten A_n, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man den Weg der Entwicklung zurückverfolgt.

2. Sei

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

eine Folge von positiven Größen, und nehmen wir an, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \varepsilon_n$$

konvergent ist. Wir bilden die Polynome

$$P_n(x) = 1 - \frac{(nx)^2}{2!} + \frac{(nx)^4}{4!} - \ldots \pm \frac{(nx)^{2p_n}}{(2p_n)!},$$

$$Q_n(x) = \frac{(nx)^1}{1!} - \frac{(nx)^3}{3!} + \ldots \pm \frac{(nx)^{2p_n+1}}{(2p_n+1)!}.$$

Da die Entwicklung von $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ nach den Potenzen von x in jedem Intervalle absolut und gleichmäßig konvergiert, so kann man p_n immer so wählen, daß für jedes x des Intervalls $(0, 2\pi)$

$$|\theta_n(x)| = |P_n(x) - \cos(nx)| < \varepsilon_n,$$

$$|\tau_n(x)| = |Q_n(x) - \sin(nx)| < \varepsilon_n \quad \text{und} \quad \frac{(2n\cdot\pi)^{2p_n+1}}{(2p_n+1)!} < \varepsilon_n$$

ausfällt.

Satz II. *Jede Funktion, die in dem Intervalle* $(0, 2\pi)$ *in eine Fourierreihe entwickelbar ist, läßt sich auch nach den Polynomen* $P_n(x)$ *und* $Q_n(x)$ *entwickeln.*

Dieser Satz ist unmittelbare Folge vom Satz I, weil

$$|\theta_n(x)\cos(ns)| \leqq |\theta_n(x)| < \varepsilon_n, \qquad |\tau_n(x)\sin(ns)| \leqq |\tau_n(x)| < \varepsilon_n,$$

und weil

$$\begin{aligned} |\tau_n'(x)| &= |Q_n'(x) - n\cos(nx)| = n\,|P_n(x) - \cos(nx)| \\ &= n\,|\theta_n(x)| < n\,\varepsilon_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\theta_n'(x)| &= |P_n'(x) + n\sin(nx)| \leqq n\,|Q_n(x) - \sin(nx)| \\ &\quad + n\cdot\frac{(nx)^{2p_n+1}}{(2p_n+1)!} < 2n\,\varepsilon_n, \end{aligned}$$

was die gleichmäßige Konvergenz von

$$-K(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\theta_n(x)\cos ns}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\tau_n(x)\sin(ns)}{2\pi}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\theta_n'(x)\cos ns}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\tau_n'(x)\sin ns}{2\pi}$$

ergibt.

Man muß hierbei noch die Polynome im Rahmen der Bedingungen, denen sie genügen sollen, so wählen, daß der Kern $K(x,y)$ den Eigenwert *Eins* nicht zuläßt. Es genügt zum Beispiel, daß

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K(x,y)^2\,dx\,dy < 1.^{1})$$

3. Sei $S(x,y)$ ein symmetrischer Kern. Seine Eigenwerte seien nach dem absoluten Betrag geordnet: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$; jeder komme so oft vor, als ihm verschiedene Eigenfunktionen zugeordnet sind. Ferner seien $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), \ldots$ ein Hauptsystem der zugehörigen Eigen-

[1]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Zweite Abhandlung. Mathematische Annalen **64** (1907), S. 161–174, insbes. S. 162.

funktionen, d. h. ein normiertes System von reellen Funktionen, die die Bedingungen

$$v_n(x) = \lambda_n \int_a^b S(x,t)\, v_n(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

erfüllen.

E. Schmidt[2]) hat, in Vervollständigung der Resultate von D. Hilbert, gezeigt, daß jede Funktion $f(x)$, die in die Form

$$f(x) = \int_a^b S(x,t)\, p(t)\, dt$$

gebracht werden kann, wobei $p(x)$ eine stetige Funktion oder eine integrierbare Funktion mit integrierbarem Quadrat bedeutet, in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x)$$

entwickelt werden kann, deren Koeffizienten $A_n = \int_a^b f(x)\, v_n(x)\, dx$ sind.

Satz III. *Sei*

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots$$

ein System von stetigen Funktionen, die sich in die Form

$$\psi_n(x) = \int_a^b S(x,t)\, p_n(t)\, dt$$

bringen lassen, wobei $p_n(t)$ stetige Funktionen bedeuten.

Jede stetige Funktion $F(x)$ von der Form

$$F(x) = \int_a^b S(x,t)\, p_0(t)\, dt,$$

wobei $p_0(t)$ eine integrierbare Funktion mit integrierbarem Quadrat bedeutet, kann nach den $\psi_n(x)$ entwickelt werden, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [p_n(x) - \lambda_n v_n(x)]\, v_n(y)$$

gleichmäßig konvergiert, aus welcher Voraussetzung auch die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$K(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x)\, v_n(y)$$

folgt. Hier ist

$$\theta_n(x) = \psi_n(x) - v_n(x).$$

[2]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Erste Abhandlung. Mathematische Annalen **63** (1907), S. 433–476.

Um diesen Satz zu beweisen, werden wir wieder versuchen, $F(x)$ in die Form

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(x)$$

zu bringen, wobei A_n die Fourierkoeffizienten

$$A_n = \int_a^b f(x) v_n(x) dx$$

der noch unbestimmt gelassenen Funktion $f(x)$ bedeuten. So gelangen wir zur Integralgleichung

$$F(x) = f(x) - \int_a^b K(x,t) f(t) dt.$$

Hier muß noch nachgewiesen werden, daß die Lösung $f(x)$ dieser Gleichung, die die Koeffizienten A_n völlig bestimmt, die Entwicklung nach den $v_n(x)$ zuläßt, was wir stillschweigend angenommen haben.

In der Tat ist nach unseren Voraussetzungen die Lösung $f(x)$ eine stetige Funktion von x. Da außerdem

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_n(x) - v_n(x)] v_n(t) = \int_a^b S(x,s) \sum_{n=1}^{\infty} [p_n(s) - \lambda_n v_n(s)] v_n(t) ds$$

ist, so bekommt man

$$f(x) = F(x) + \int_a^b \int_a^b S(x,s) f(t) \sum_{n=1}^{\infty} [p_n(s) - \lambda_n v_n(s)] v_n(t) ds\, dt$$

$$= F(x) + \int_a^b S(x,s) p(s) ds,$$

wo $p(s)$ eine stetige Funktion von s ist. Folglich läßt sich $f(x)$ als Summe zweier Funktionen, die nach den $v_n(x)$ entwickelbar sind, auch nach den $v_n(x)$ entwickeln, w. z. b. w.

§ 2.

Funktionen komplexer Veränderlichen.

Sei $f(z)$ eine reguläre analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ in dem ringförmigen Gebiete (G) zwischen zwei Kreisen, die um den Anfangspunkt mit den Radien R_1 und $R_2 > R_1$ gezogen sind. Für jeden Punkt z dieses Gebietes hat man bekanntlich

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n \int_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \tag{3}$$

wo die Integrale längs eines beliebigen Kreises C von Radius r $(R_1 < r < R_2)$ zu nehmen sind.

Dann gilt der folgende Satz, der sich zu einem Birkhoffschen[3]) verhält wie der vorstehende Laurentsche Satz zum Cauchy-Taylorschen:

Satz IV. *Sei*

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots,$$

$$\varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2}, \ldots, \varepsilon_{-n}, \ldots$$

eine Folge von positiven Größen, für die die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{r^{n+1}}$$

konvergiert. Ist ferner

$$\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_n(z), \ldots,$$

$$\psi_{-1}(z), \ldots, \psi_{-n}(z), \ldots$$

ein System von in dem Gebiete G regulären Funktionen, die den Bedingungen

$$|\theta_n(z)| = |\psi_n(z) - z^n| < \varepsilon_n \quad [n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$$

genügen, so kann jede Funktion $F(z)$, die in demselben Gebiete (G) regulär ist, nach den $\psi_n(z)$ entwickelt werden.

Jede reguläre Funktion $f(z)$ kann in dem Gebiete (G) gemäß der Formel

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n z^n,$$

wobei

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \tag{4}$$

bedeutet, nach positiven und negativen Potenzen von z entwickelt werden. Wir werden hier $f(z)$ so bestimmen, daß die Reihe

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \psi_n(z)$$

die Funktion $F(z)$ darstellt.

Ersetzt man hier $\psi_n(z)$ durch $\theta_n(z) + z^n$ und A_n durch den Ausdruck (4), so bekommt man wegen (3)

$$F(z) = f(z) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(z) \int_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

---

[3]) G. D. Birkhoff, Sur une généralisation de la série de Taylor, Comptes rendus **164** (1917), S. 942, vgl. auch H. Poincaré, Remarques diverses sur l'équation de Fredholm, Acta Mathematica **33** (1910), S. 83.

Laut Voraussetzung ist aber

$$\left|\frac{\theta_n(z)}{\zeta^{n+1}}\right| < \frac{\varepsilon_n}{r^{n+1}},$$

folglich

$$f(z) = F(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} K(z,\zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \tag{5}$$

wobei

$$K(z,\zeta) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_n(z)}{\zeta^{n+1}}$$

ist. Das ist eine Fredholmsche Integralgleichung, deren Kern eine reguläre Funktion in z und ζ ist. Da $F(z)$ auch regulär ist, so ist die Lösung dieser Gleichung auch regulär und läßt die Entwicklung (3) zu, was unsere Annahme von der Entwickelbarkeit von $f(z)$ nachträglich rechtfertigt.

Die Gleichung (5) wird in eine Integralgleichung reeller Veränderlichen übergehen, wenn man

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \zeta = re^{i\psi}$$

schreibt. Auf diese Weise ergibt sich die gewöhnliche Fredholmsche Gleichung

$$f(\varphi) = F(\varphi) - \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\psi} K(\varphi,\psi) f(\psi)\, d\psi,$$

wobei $f(\varphi), F(\varphi), K(\varphi,\psi)$ usw. der Klarheit halber statt $f(re^{i\varphi})$, $F(re^{i\varphi})$ usw. geschrieben ist.

Wenn das Gebiet einfach zusammenhängend ist, so bekommt man das Resultat von Birkhoff.

(Eingegangen am 20. Juli 1921.)

Über die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators.

Von

Stefan Bergmann in Berlin.

Ein Transformator besteht im wesentlichen aus einem Eisenkörper, dessen vertikaler Querschnitt von der in Fig. 1 oder Fig. 2 angegebenen Gestalt ist; dieser Eisenkörper ist von einer isolierten Wicklung umgeben. Fließt in der Wicklung ein Strom, so entsteht im Eisenkörper und in der umgebenden Luft ein magnetisches Feld.

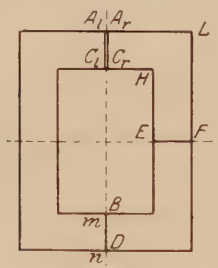

Fig. 1.

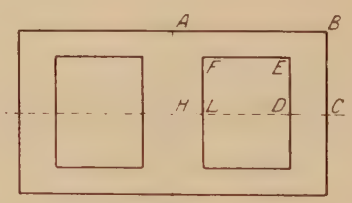

Fig. 2.

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit besteht in der Beschreibung einer Methode, die zur tatsächlichen Berechnung dieses Feldes (mit anderen Worten zur Ermittlung der entsprechenden Potentialfunktion) dient. Dabei machen wir zwei vereinfachende Annahmen:

1. Daß der Transformator in der Tiefenrichtung nach beiden Seiten unendlich ausgedehnt ist.

2. Daß die Permeabilität des Eisens konstant (d. h. unabhängig von der Feldstärke) und unendlich groß im Vergleich zur Permeabilität der Luft ist.

Durch diese beiden Annahmen reduziert sich unsere Frage auf die Auffindung einer Funktion, die in dem in Fig. 1 bzw. Fig. 2 angegebenen

zweidimensionalen Gebiete harmonisch und längs der einzelnen Berandungslinien konstant ist.

Durch einige einfache Betrachtungen in § 1 zeigen wir, daß die eigentliche Schwierigkeit, die dabei auftritt, in der Ermittlung derjenigen Funktion besteht, die die obere Halbebene auf das Gebiet $A_r C_r H E F L$ (vgl. Fig. 1) abbildet. Dies geschieht bekanntlich durch Vermittlung des hyperelliptischen Integrals

$$\int_0^t \left(1-\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{k=5} \left(1-\frac{t}{t_k}\right)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

wobei $t_\varkappa$ (die Verzweigungspunkte) diejenigen Punkte der reellen Achse sind, die den Eckpunkten unseres Gebietes entsprechen. Unsere Aufgabe besteht darin, zu zeigen, wie man aus den gegebenen Seitenlängen $A_r C_r, HE$ usw., d. h. aus den Periodizitätsmoduln des Integrals seine Verzweigungspunkte t_k bestimmen kann.

Um diese Aufgabe zu lösen, führen wir folgende Betrachtung durch: Herr Bieberbach hat bemerkt, daß unter allen in einem Gebiete G regulär-analytischen Funktionen $g(z)$, die den Bedingungen $g(0)=0$, $g'(0)=1$ genügen, die Kreisabbildungsfunktion $w(z)\,[w(0)=0,\ w'(0)=1]$ des Gebietes G das Integral

$$\iint_G w'(z)\,\overline{w'(z)}\,df$$

zum Minimum macht. Es bedeutet dabei df das Flächenelement in der z-Ebene; $\overline{w'(z)}$ den zu $w'(z)$ konjugiert komplexen Wert. Läßt man als Vergleichsfunktionen nur Polynome n-ten Grades $g_n(z)$ $[g_n(0)=0,\ g_n'(0)=1]$ zu, und ist dann $W_n(z)$ das Minimalpolynom, so ist $\lim_{n\to\infty} W_n(z)$ das dem Nullpunkt $z=0$ zugehörige Funktionselement derjenigen Funktion, die G auf den Kreis abbildet. Stellt man $W_n(z)$ in der Form einer Determinante dar, so erhält man für $W(z)$ die Darstellung (3) (siehe S. 15).

In unserem Falle, wo es sich um hyperelliptische Integrale handelt, und das Gebiet G aus Rechtecken besteht, lassen sich die einzelnen Integrale $\iint_G z^r \bar{z}^k df$ leicht auswerten. Bezeichnen wir mit $2\omega_\nu$ die Periodizitätsmoduln des hyperelliptischen Integrals, so gilt für die in der angegebenen Determinante (4) (S. 17) vorkommenden Flächenintegrale

$$\iint_G z^r \bar{z}^k df = F_{rk}(\omega) =$$

$$\sum_{s=1}^{r+k+1} \frac{L_s^{(r,k)}}{s(k+r+2-s)} \sum \left\{ \left[\left(\sum{}' \omega_\nu\right)^{k+r+2-s} - \left(\sum{}'' \omega_\nu\right)^{k+r+2-s} \right] \left[\left(\sum{}''' \omega_\nu\right)^{s} - \left(\sum{}'''' \omega_\nu\right)^{s} \right] \right\},$$

wo die $L_s^{(r,k)}$ gewisse konstante Zahlen sind und die Summationen in bestimmter, in § 2 angegebener Weise vorzunehmen sind. Dasselbe Funktionselement (3) (Seite 15) können wir aber noch in einer anderen Form darstellen und zwar so, daß seine Koeffizienten Funktionen der Verzweigungspunkte werden, indem wir im Integral (1) die obere Halbebene der t-Ebene durch den Einheitskreis ersetzen, was durch die Substitution $t = -i\frac{s+1}{s-1}$ zu erreichen ist, das Funktionselement der inversen Funktion bilden und es in bestimmter Weise normieren.

Die auf diese Weise erhaltene Potenzreihe ist mit (3) identisch. Während aber in (3) die einzelnen Koeffizienten als unendliche Determinanten aus den Periodizitätsmoduln erscheinen, sind sie in der zweiten Darstellung rationale Funktionen der Verzweigungspunkte. Durch Vergleich der Koeffizienten der beiden Darstellungen erhält man somit eine Reihe von Relationen (12) (siehe S. 23) zwischen den Perioden $2\omega_\nu$ und den Verzweigungspunkten (falls die letzteren sämtlich auf der reellen Achse liegen). Es ist dabei: $s_k = \frac{t_k + i}{t_k - i}$; $F_{rk}^{(m)}(\omega)$ gleich dem früher angegebenen Ausdruck $F_{rk}(\omega)$ und $\pi\varrho^2$ gleich der Determinante (4) (S. 17).

Aus diesen Formeln lassen sich die Verzweigungspunkte t_k bestimmen, und wir erhalten auf diese Weise dasjenige Integral, das die obere Halbebene auf das Gebiet $A_\nu C_\nu HEFL$ der Fig. 1 abbildet.

In § 3 gehen wir zur Auswertung dieses Integrals über, was insofern Schwierigkeiten bietet, als die direkte Ausrechnung des Integrals

$$z(t) = \int_0^t \prod \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^{\mu_k} dt$$

so umständlich und zeitraubend ist, daß man, um rascher zum Ziel zu kommen, zu anderen Methoden greifen muß. Diese Methoden werden in der vorliegenden Arbeit nur skizziert, ohne auf die Einzelheiten näher einzugehen[1]).

Die hier durchgeführten Betrachtungen scheinen uns trotz ihrer Einfachheit nicht ohne Interesse zu sein, erstens weil die Theorie des magnetischen Feldes eines Transformators ein sehr geeignetes Beispiel für die Anwendung der Untersuchungen über die hyperelliptischen Integrale auf praktische Zwecke sein dürfte, zweitens weil der Weg, auf dem wir die Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Integrals aus den Periodizitätsmoduln bestimmt haben, im Gegensatz zu den bisher in der Theorie der

[1]) Vgl. den Aufsatz „Über die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Transformator", der demnächst in der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheinen wird.

Abelschen Integrale üblichen Methoden „algebraisch“ ist. Es ist bemerkenswert, daß diese Frage, die sonst ernste Schwierigkeiten bietet, bei Anwendung unserer Methoden sich so einfach erledigen läßt.

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit benutzen, meinem Freunde Herrn Dr. Gumbel für die mir erteilten mannigfachen Ratschläge und insbesondere für die Hilfe bei der Redaktion der Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.

§ 1.

Reduktion der Abbildung symmetrischer, mehrfach zusammenhängender Bereiche auf die Abbildung einfach zusammenhängender.

Ein Transformator besteht im wesentlichen aus einem zwei- (bzw. drei-)fach zusammenhängenden Eisenkörper K^*, dessen vertikaler Querschnitt von der in Fig. 1 und Fig. 2 (S. 8) angegebenen Gestalt ist; dieser Eisenkörper ist von einer isolierten Wicklung umgeben. Fließt in dieser Wicklung ein Strom, so entsteht im Eisenkörper und in der umgebenden Luft ein magnetisches Feld. Die Niveauflächen dieses Feldes werden uns annäherungsweise durch die Flächen $U(x, y, z) = \text{konst.}$ einer Funktion $U(x, y, z)$ gegeben, die innerhalb und außerhalb des Körpers K^* stetig differentiierbar ist, mit ihren ersten Ableitungen von beiden Seiten in die Oberfläche stetig fortgesetzt werden kann und die innerhalb und außerhalb von K^* der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0$$

genügt, wobei μ innerhalb K^* die Permeabilität des Eisens, außerhalb die Permeabilität der Luft bezeichnet. Bezeichnen wir an einer beliebigen Stelle der Oberfläche mit n die Normale zur Oberfläche des Transformators, mit T_1 die Tangentialrichtung senkrecht zur Stromrichtung, mit T_2 die Tangentialrichtung parallel zur Stromrichtung, so erleidet U und $\left(\frac{\partial U}{\partial T_2}\right)$ beim Übergang durch die Oberfläche keinen Sprung; es ist ferner an der Oberfläche von K^*

$$\mu_{\text{Eisen}}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{\text{Eisen}}=\mu_{\text{Luft}}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{\text{Luft}},\quad\text{und}\quad\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T_1}\right)_{\text{Eisen}}-\left(\frac{\partial U}{\partial T_1}\right)_{\text{Luft}}\right]$$

gleich der linearen Flächenstromdichte[2]). Diese letzte Beziehung besagt, daß die Kupferdicke unendlich dünn ist, was der Wirklichkeit natürlich

---

[2]) Vgl. dazu P. Debye, Stationäre und quasistationäre Felder. Encyklop. der Mathemat. Wissenschaften V, 17 (5), S. 400.

nur angenähert entspricht. Im Unendlichen verschwindet U wie $\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Die Bestimmung der Funktion U kann man dadurch vereinfachen, daß man folgende spezielle Annahmen macht:

1. Der Transformator ist in der Tiefenrichtung nach beiden Seiten unendlich ausgedehnt.

2. Die Permeabilität μ des Eisens ist konstant (von U unabhängig) und unendlich groß im Vergleich zur Permeabilität der Luft. In Wirklichkeit sind diese beiden Bedingungen nur bis zu einem gewissen Grade erfüllt, die vereinfachte Lösung u kann nur in erster Annäherung als Lösung des allgemeinen Problems gelten. Durch die soeben gemachten Annahmen reduziert sich unser Problem auf die Bestimmung einer Funktion u, die in dem in Fig. 1 (bzw. Fig. 2, S. 8) angegebenen Gebiete K der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt. Die Randbedingungen besagen jetzt, daß die äußersten Niveaulinien mit den Randlinien zusammenfallen, d. h. daß u auf jeder Berandungslinie konstant ist. Wie sofort ersichtlich, ist diese Aufgabe identisch mit der konformen Abbildung dieser Gebiete auf gewisse andere, für die die Lösung bekannt ist.

Es handelt sich dabei nicht um die Existenzbeweise; es kommt uns vielmehr in erster Linie darauf an, den Weg zu zeigen, der in den betrachteten Fällen zur tatsächlichen Aufstellung der Lösungsfunktion führt. Das hier angegebene Verfahren bezieht sich auf spezielle Bereiche, die für uns in Betracht kommen; doch läßt es sich ohne Schwierigkeiten auf zwei- (bzw. drei-) fach zusammenhängende, in bezug auf die x-Achse symmetrische, von endlich vielen Geraden berandete Bereiche erweitern.

Ein zweifach zusammenhängender von zwei Jordankurven berandeter Bereich G läßt sich (samt der Berandung) auf einen Kreisring abbilden (das Innere konform, die Berandung im allgemeinen eindeutig), wobei das Radienverhältnis des äußeren und des inneren Kreises durch die Dimensionen des ursprünglichen Gebietes gegeben ist. Durch die Abbildung gehen die Niveau- bzw. Stromlinien von G in das System der zur Berandung konzentrischen Kreise bzw. Radien des Kreisringes über. Kennt man von vornherein eine dieser Stromlinien in K, so läßt sich die Abbildung des zweifach zusammenhängenden Gebietes sofort auf die Abbildung eines einfach zusammenhängenden reduzieren. Wir bezeichnen (vgl. Fig. 1) die bekannte Stromlinie mit AC und schneiden das Gebiet K längs ihr auf. Sei $A_r C_r$ das rechte, $A_l C_l$ das linke Ufer von AC. Es genügt offenbar das zerschnittene Gebiet $A_r n A_l C_l m C_r$ auf ein Rechteck $DEFH$ (vgl. Fig. 3) abzubilden, so daß A_r in D, A_l in E, C_l in F, C_r in H übergeht. Durch diese letzte Forderung ist, wie man leicht einsieht, das

Seitenverhältnis $\frac{DE}{EF}$ des Rechteckes bestimmt. Ziehen wir im Rechteck die zu den Seiten DE parallelen Geraden und bilden sie rückwärts auf das ursprüngliche Gebiet ab, so erhalten wir die gesuchten Niveaulinien. Im ersten unserer Fälle (vgl. Fig. 1) ist aus Symmetriegründen die Stromlinie AC sofort bekannt. Man bildet hier zweckmäßig nicht das Gebiet $A_r C_r m C_l A_l n A_r$, sondern das Gebiet $A_r C_r E F$ auf ein Rechteck ab.

Fig. 3.

Im Falle des dreifach zusammenhängenden Gebietes (vgl. Fig. 2) gibt es keine Figur, für die die Niveaulinien von vornherein bekannt wären. Wir wissen aber, daß es bei konstanten Randwerten nur zwei linear unabhängige Lösungen w_1 und w_2 gibt. Jede Lösung wird sich in der Form $a + bw_1 + cw_2$ darstellen lassen, wo a, b, c Konstante sind. In unserem Falle, wo wir die Symmetrie des Gebietes benutzen können, ist es leicht, zwei linear unabhängige Lösungen $w_1(x, y)$ und $w_2(x, y)$ zu bestimmen. Wir müssen das Gebiet $ABCDEFGHA$ zweimal auf Rechtecke abbilden, so daß einmal die Punkte A, H, C, D in die Eckpunkte des einen Rechteckes, und das andere Mal die Punkte H, L, D, C in die des zweiten Rechteckes übergehen.

Das Seitenverhältnis ist in beiden Rechtecken durch die Dimensionen des ursprünglichen Bereiches bestimmt; es ist natürlich im allgemeinen in beiden Rechtecken verschieden. Diejenigen Kurven in G, die den zu $A'D'$ (bzw. $A''D''$) parallelen Geraden in den Rechtecken entsprechen, sind die Niveaulinien von $w_1(x, y)$ bzw. $w_2(x, y)$.

Damit reduziert sich unsere ganze Aufgabe auf die Abbildung des einfach zusammenhängenden Bereiches $A_r C_r E F$ (Fig. 1) bzw. $AHFDCB$ (Fig. 2) auf die obere Halbebene. Die Abbildung der oberen Halbebene auf ein Rechteck wird durch elliptische Integrale bewerkstelligt.

Die obere Halbebene wird auf einen polygonalen Bereich G durch ein Integral $w(t) = \int_0^t \Pi \left(1 - \frac{t}{a_k}\right)^{\mu_k}$ [3]) abgebildet, wo die $\mu_k \pi$ die Außenwinkel des Bereiches G sind, und die a_k diejenigen Punkte der reellen Achse, die den Eckpunkten von G entsprechen. In unserem Falle reduziert sich der Ausdruck $w(t)$ auf ein hyperelliptisches Integral erster Gattung; die Seitenlängen des Bereiches G werden (wie wir uns noch überlegen werden) die Periodizitätsmoduln des Integrals, die a_k dessen

[3]) Vgl. Schwarz: Über einige Abbildungsaufgaben. Ges. Werke 2, S. 64—83, oder Study und Blaschke: Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, II. Heft, § 9 bis § 12.

Verzweigungspunkte. Es wird somit unsere erste Aufgabe darin bestehen, die Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Perioden zu bestimmen. Die Verzweigungspunkte sind dabei sämtlich *reell*. Wir werden uns aber nicht allein auf die in der Theorie des Transformators auftretenden Bereiche beschränken, sondern ziehen allgemeine Gebiete in Betracht, die auf einer Riemannschen Fläche liegen, von einen Treppenpolygonalzug und evtl. noch von einem Polygonalschlitz, der in das Innere des Bereiches hineinführt, begrenzt sind. Diese allgemeinere Fassung ist von Interesse für die Theorie der hyperelliptischen Integrale. Nachdem diese Frage erledigt sein wird, werden wir uns zum zweiten schwierigeren Problem wenden. Dies ist die Frage der Auswertung der hyperelliptischen Integrale.

§ 2.

Die Beziehungen, die zwischen den Perioden eines hyperelliptischen Integrals und dessen Verzweigungspunkten bestehen, wenn die letzteren reell sind.

Eine im Einheitskreis reguläre analytische Funktion, die im Nullpunkte verschwindet und dort die Ableitung vom Werte Eins besitzt, bildet, wie bekannt, das Innere dieses Kreises auf einen Bereich ab, dessen Fläche größer ist als die Kreisfläche. Es folgt daraus: Die Funktion $w(z)$ mit $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$, die einen einfach zusammenhängenden von einer Jordankurve begrenzten schlichten Bereich G, der den Nullpunkt im Innern enthält, auf das Innere eines Kreises abbildet, besitzt folgende Eigenschaft: Der durch sie vermittelte Bildbereich hat den kleinsten Flächeninhalt unter allen Bildbereichen, auf die G durch eine Funktion $g(z)$ mit $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$ abgebildet werden kann. Diese Eigenschaft der Kreisabbildungsfunktion benutzt Herr Bieberbach zur Bestimmung gewisser Polynome, die, wie er zeigt, Approximationen der Kreisabbildungsfunktion eines Bereiches G sind[4]). Die Größe des Flächeninhaltes eines durch die Funktion $g(z)$ vermittelten Bildbereiches wird durch das Integral

$$\iint_G g'(z)\,\overline{g'(z)}\,df \tag{1}$$

dargestellt. Dabei bedeutet: df das Flächenelement in der z-Ebene im Punkte z, $g'(z)$ die Ableitung von $g(z)$, und $\overline{g'(z)}$ den zu ihr konjugierten Wert im Punkte z, das Produkt $g'(z)\,\overline{g'(z)}$ also das Quadrat des linearen Verzerrungsverhältnisses. Herr Bieberbach setzt in (1) für

[4]) Siehe dazu Bieberbach: Einführung in die konforme Abbildung, Sammlung Göschen, S. 95, und Bieberbach: Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Rend. d. Circ. mat. di Palermo **38** (1914), S. 98—112.

$g'(z)$ ein Polynom n-ten Grades $W_n'(z) = 1 + a_1^{(n)} z + a_2^{(n)} z^2 + \ldots + a_n^{(n)} z^n$ ein $[W_n(0) = 0]$ und bestimmt seine Koeffizienten $a_s^{(n)}$ so, daß $W_n'(z)$ in (1) eingesetzt, (1) zu einem Minimum macht, wenn zum Vergleiche alle Polynome n-ten Grades mit der Einschränkung $W_n'(0) = 1$ herangezogen werden. Es gibt immer ein einziges Polynom dieser Art, das man in bekannter Weise (endliche Extremumaufgabe) bestimmen kann. Ist G ein einfach zusammenhängender schlichter Bereich, der von einer Jordankurve begrenzt ist, so konvergiert bei wachsenden n der Wert des Polynoms $W_n(z)$ im Inneren von G gleichmäßig gegen die Kreisabbildungsfunktion $w(z)$. Es folgt daraus, daß die einzelnen Koeffizienten $a_s^{(n)}$ gegen die Koeffizienten des Funktionselementes $W'(z) = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s z^s$ [um $z = 0$] der Ableitung der Kreisabbildungsfunktion $w(z)$ konvergieren. Denn es ist $a_s = \frac{1}{s!}\left[\frac{d^s w(z)}{dz^s}\right]_{z=0}$. Da ferner $w_n(z)$ im abgeschlossenen Kreise um Nullpunkt gegen $w(z)$ gleichmäßig konvergiert, so ist

$$a_s = \lim_{n \to \infty} a_s^{(n)}. \tag{2}$$

Die soeben durchgeführte Betrachtung erlaubt uns das Funktionselement $W(z)$ in einer expliziten Darstellung aufzuschreiben. Es ist

$$W'(z) = 1 - z \lim_{n \to \infty} \frac{\begin{vmatrix} \iint \bar{z}\, df & \iint z^2 \bar{z}\, df & \iint z^3 \bar{z}\, df & \ldots & \iint z^n \bar{z}\, df \\ \iint \bar{z}^2 df & \iint z^2 \bar{z}^2 df & \iint z^3 \bar{z}^2 df & \ldots & \iint z^n \bar{z}^2 df \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \iint \bar{z}^n df & \iint z^2 \bar{z}^n df & \iint z^3 \bar{z}^n df & \ldots & \iint z^n \bar{z}^n df \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \iint z\bar{z}\, df & \iint z^2 \bar{z}\, df & \iint z^3 \bar{z}\, df & \ldots & \iint z^n \bar{z}\, df \\ \iint z\bar{z}^2 df & \iint z^2 \bar{z}^2 df & \iint z^3 \bar{z}^2 df & \ldots & \iint z^n \bar{z}^2 df \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \iint z\bar{z}^n df & \iint z^2 \bar{z}^n df & \iint z^3 \bar{z}^n df & \ldots & \iint z^n \bar{z}^n df \end{vmatrix}} -$$

$$- z^2 \lim_{n \to \infty} \frac{\begin{vmatrix} \iint z\bar{z}\, df & \iint \bar{z}\, df & \iint z^3 \bar{z}\, df & \ldots & \iint z^n \bar{z}\, df \\ \iint z\bar{z}^2 df & \iint \bar{z}^2 df & \iint z^3 \bar{z}^2 df & \ldots & \iint z^n \bar{z}^2 df \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \iint z\bar{z}^n df & \iint \bar{z}^n df & \iint z^3 \bar{z}^n df & \ldots & \iint z^n \bar{z}^n df \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \iint z\bar{z}\, df & \iint z^2 \bar{z}\, df & \iint z^3 \bar{z}\, df & \ldots & \iint z^n \bar{z}\, df \\ \iint z\bar{z}^2 df & \iint z^2 \bar{z}^2 df & \iint z^3 \bar{z}^2 df & \ldots & \iint z^n \bar{z}^2 df \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \iint z\bar{z}^n df & \iint z^2 \bar{z}^n df & \iint z^3 \bar{z}^n df & \ldots & \iint z^n \bar{z}^n df \end{vmatrix}} - \ldots, \tag{3}$$

wobei jedes Doppelintegral über das Gebiet G zu erstrecken ist. Um (3) zu bekommen, hat man in der früher angegebenen Weise die $W_n(z)$ zu bestimmen und dann zum $\lim_{n \to \infty}$ überzugehen.

Die hier angegebene Darstellung des Funktionselementes der Kreisabbildungsfunktion gilt, wie bemerkt, nur für die von einer Jordan-

kurve berandeten Bereiche G. Wir wollen eine analoge Darstellung für Schlitzbereiche angeben.

Die Erledigung dieser Frage ist nur eine Hilfsbetrachtung für das Folgende. Wir werden nur mit polygonalen Bereichen zu tun haben, die innere Winkel von 90^0 oder 270^0 aufweisen. Die vorkommenden Schlitze werden immer Strecken sein, die senkrecht bzw. parallel zu der betreffenden Seite verlaufen. Wir spezialisieren deswegen unsere Betrachtungen von vornherein auf Bereiche mit diesen beiden Eigenschaften. Durch ein rechtwinkliges Fünfeck $ABCDEF$ (vgl. Fig. 4), bei dem drei Seiten parallel zum Schlitz und zwei andere senkrecht zu ihm verlaufen, können wir jeden Schlitz aus dem Bereich G ausschneiden. Die Strecke BC soll dabei eine (von Null verschiedene) Länge $2b_m$ haben. Das übrigbleibende Gebiet $MNABCDHL$ ist dann von einer Jordankurve berandet. Wir bezeichnen es mit G_m. Für G_m gilt die oben angegebene Darstellung (3) des Funktionselementes der Kreisabbildungsfunktion. Lassen wir jetzt b_m gegen 0 konvergieren, so konvergiert das Innere von G_m gegen das Innere von G. Herr Carathéodory hat solche veränderliche Bereiche, deren Inneres gegen einen bestimmten offenen Bereich konvergiert, untersucht[5]). Nach seinen Ergebnissen können wir schließen, daß der $\lim_{m\to\infty}$ der Kreisabbildungsfunktion $w^{(m)}(z)$ der Bereiche G_m die Kreisabbildungsfunktion des Limesbereiches G wird. Wir haben somit die Darstellung des Funktionselementes der Kreisabbildungsfunktien $w(z)$ des Schlitzbereiches G als $\lim_{m\to\infty} W^{(m)}(z)$. In (3) haben wir für $W^{(m)}(z)$ eine explizite Darstellung erhalten. Bezeichnen wir die dort auftretenden Determinanten mit $a_s^{(m,n)}$, so schreibt sich (3) in der Form $\frac{d}{dz} W^{(m)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} z^s \lim_{n\to\infty} a_s^{(m,n)}$, und das Funktionselement der Ableitung der kreisabbildenden Funktion $W'(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{s=0}^{\infty} z^s \lim_{n\to\infty} a_s^{(m,n)}$. Wir können den doppelten Grenzübergang $(m \to \infty,\ n \to \infty)$ durch einen einfachen ersetzen, indem wir n durch ein passendes $q(m)$ ersetzen, so daß für jeden inneren Punkt $|w^{(m)}(z) - W_{q(m)}^{m}(z)| < \varepsilon_m$ ist, wobei $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$ ist. Aus dem Bieberbachschen Satz (loc. cit.), daß man die Kreisabbildungsfunktion $w^{(m)}(z)$ von G_m durch ein Polynom beliebig approximieren kann, folgt, daß man solche Funktion $q(m)$ stets finden kann. Man kann sie auch gegebenfalls auf Grund des Rungeschen Satzes[6]) über die Approxi-

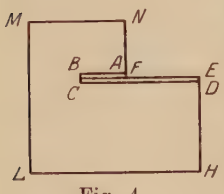

Fig. 4.

[5]) Carathéodory: Untersuchungen über die konforme Abbildung von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Annalen 72 (1912), S. 107—144.

[6]) Runge: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Acta Mathematica 6 (1889), S. 229—248.

mation der regulären Funktionen durch Polynome in vorgegebenen Bereichen tatsächlich bestimmen.

Wir nehmen für das Folgende einfachheitshalber an, daß die $2b_m = BC$ so gewählt sind, daß $\varphi(m) = m$ ist.

Dann erhalten wir für das Funktionselement $W'(z)$ eine Darstellung, die genau wie die Formel (3) aufgebaut ist, wobei aber der Grenzübergang $n \to \infty$ durch den Grenzübergang $m \to \infty$ zu ersetzen ist und die Flächenintegrale $\iint z^k \bar{z}^r df$ über das Gebiet G_m zu nehmen sind. Der Radius ϱ des Kreises, auf den G abgebildet wird, läßt sich folgendermaßen bestimmen: $\pi\varrho^2$ ist die Fläche dieses Kreises, da aber diese Fläche das gesuchte Minimum ist, so ist

$$(4) \qquad \pi\varrho^2 = \lim_{m\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} \iint df & \iint z\,df & \iint z^2 df & \dots & \iint z^m df \\ \iint \bar{z}\,df & \iint \bar{z}\,z\,df & \iint \bar{z}\,z^2 df & \dots & \iint \bar{z}\,z^m df \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \iint \bar{z}^m df & \iint z^m z\,df & \iint z^m z^2 df & \dots & \iint \bar{z}^m z^m df \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \iint \bar{z}\,z\,df & \iint z\,z^2 df & \dots & \iint \bar{z}\,z^m df \\ \iint \bar{z}^2 z\,df & \iint \bar{z}^2 z^2 df & \dots & \iint \bar{z}^2 z^m df \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \iint \bar{z}^m z\,df & \iint \bar{z}^m z^2 df & \dots & \iint \bar{z}^m z^m df \end{vmatrix}}.$$

Wir wollen noch die Integrale $\iint\limits_{G_m} z^k \bar{z}^r df$ durch Funktionen der Seitenlängen des Bereiches G_m ausdrücken. Ist uns ein einzelnes Rechteck G'_m (vgl. Fig. 3) gegeben, dessen Ecken H, F, E und D sich in den Punkten $(\alpha_1 + \alpha_2 i)$, $(\beta_1 + \alpha_2 i)$, $(\beta_1 + \beta_2 i)$ und $(\alpha_1 + \beta_2 i)$ befinden, so können wir $\iint\limits_{G'_m} z^k \bar{z}^r du$ folgendermaßen berechnen:

$$\iint\limits_{G'_m} z^k \bar{z}^r df = \iint\limits_{G'_m} (x+iy)^k (x-iy)^r dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{G'_m} (x^{k+r} + L_1^{(k,r)} x^{k+r-1} y + \dots + L_s^{(k,r)} x^{k+r-s} + \dots + y^{k+r})\,dx\,dy,$$

wo die Zahlenfaktoren $L_s^{(kr)}$ gleich $\sum_{\lambda=0}^{\lambda=s} (i)^\lambda (-i)^{s-\lambda} \binom{k}{\lambda}\binom{r}{s-\lambda}$ sind. Führen wir die Integration über die x und die y durch, und berücksichtigen wir, daß x in den Grenzen von α_1 bis β_1, y von α_2 bis β_2 läuft, so erhalten wir für $\iint z^k \bar{z}^r df$

$$(5) \quad \frac{(\beta_1^{k+r+1} - \alpha_1^{k+r+1})(\beta_2 - \alpha_2)}{1(k+r+1)} + L_1^{(k,r)} \frac{(\beta_1^{k+r} - \alpha_1^{k+r})(\beta_2^2 - \alpha_2^2)}{2(k+r)} + \dots$$

$$+ L_s^{(k,r)} \frac{(\beta_1^{k+r-s+1} - \alpha_1^{k+r-s+1})(\beta_2^{s+1} - \alpha_2^{s+1})}{(k+r-s)s} + \dots + \frac{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2^{k+r+1} - \alpha_2^{k+r+1})}{1(k+r+1)}.$$

Das Gebiet G_m setzt sich aus Rechtecken zusammen. Die Integrale $\iint z^k \bar{z}^r df$, genommen über jedes einzelne Rechteck, haben wir als Polynome $(k+r+2)$-ten Grades in α und β bestimmt. Es folgt daraus, daß $\iint\limits_{G_m} z^k \bar{z}^r df$ wieder ein Polynom derselben Art ist. α, β lassen sich durch die Periodizitätsmoduln ω_ν ausdrücken; wir werden deswegen das letztangegebene Polynom mit $F_{kr}^{(m)}(\omega)$ bezeichnen. Der Index m bei $F_{rk}^{(m)}$ soll dabei bedeuten, daß im Polynom $F_{rk}^{(m)}$ für α und β die Seitenlängen des m-ten Approximationsbereiches $G^{(m)}$ zu nehmen sind. Ist G kein Schlitzbereich, so dürfen wir das gesuchte Funktionselement $W(z)$ direkt in der Form (3) schreiben und die dort auftretenden Integrale durch $F_{rk}(\alpha, \beta)$ ersetzen, wo α, β die Seitenlängen von G sind. Ist dagegen G ein Schlitzbereich, so wird $W(z)$ wieder in der Form (3) dargestellt, die Integrale $\iint z^k \bar{z}^r df$ beziehen sich jetzt aber nicht auf das Gebiet G, sondern auf das Approximationsgebiet $G^{(m)}$, d. h. in (5) sind diejenigen Seiten α_ν bzw. β_ν, die an den Schlitz grenzen, durch $(\alpha_\nu - b_m)$ bzw. $(\beta_\nu - b_m)$ zu ersetzen. Z. B. im Falle eines Bereiches, wie in Fig. 4 angegeben ist, ist die Länge der Seite HE durch die von $(HE - b_m)$, von NA durch die von $(NA - b_m)$ zu ersetzen.

In der hier durchgeführten Betrachtung haben wir vorausgesetzt, daß das Gebiet G schlicht ist. Die beiden Gebiete (vgl. Fig. 1 und Fig. 2), auf die wir in der Theorie des Transformators geführt werden, besitzen diese Eigenschaft. Da aber die Abbildung der oberen Halbebene durch ein hyperelliptisches Integral im allgemeinen ein auf einer mehrblättrigen Riemannschen Fläche gelegenes einfach zusammenhängendes Gebiet liefert, so wollen wir der Vollständigkeit halber andeuten, wie man in diesem allgemeinen Falle zu einer der Formel (3) analogen Darstellung des Funktionselementes der Kreisabbildungsfunktion gelangen kann. Wir nehmen an, daß sämtliche Verzweigungspunkte von G, die wir mit $d_1, d_2, \ldots, d_m$ bezeichnen, erster Ordnung sind und in ihrer Umgebung keine anderen Blätter von G enthalten sind, als die dort verzweigten; ferner setzen wir voraus, daß die Lage dieser Verzweigungspunkte uns bekannt ist. Es läßt sich dann eine Funktion $\zeta(z)$ angeben, die den Nullpunkt in sich überführt, dort die Ableitung 1 besitzt und G auf einen schlichten Bereich abbildet. Man kann sie z. B. folgendermaßen konstruieren: Durch die Funktion $\zeta_1(z) = \sqrt{d_1 - z}$ wird G auf ein Gebiet abgebildet, das einen Verzweigungspunkt weniger hat als G. Wir bezeichnen die Verzweigungspunkte des neuen Gebietes in der ζ_1-Ebene mit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m-1}$. Wir bilden $\zeta_2(\zeta_1) = \sqrt{\delta_1 - \zeta_1}$. Die neue Funktion $\zeta_2[\zeta_1(z)]$ bildet G auf einen Bereich ab, der nur noch $(m-2)$ Verzweigungspunkte besitzt. Nach m solchen Schritten und entsprechender Normierung erhalten wir

$\zeta(z)$. Es läßt sich dann zeigen[7]), daß unsere frühere Überlegung mit der Kreisabbildungsfunktion sich vollständig wiederholen läßt mit dem Unterschiede, daß an Stelle eines Minimalpolynomes $W_n(z)$ in z ein Polynom n-ten Grades $W_n(\zeta)$ in ζ tritt.

Die Koeffizienten dieses Polynomes werden Quotienten von zwei Determinanten, die gebildet sind durch Ausdrücke von der Form $\iint_G [\zeta(z)]^r [\overline{\zeta(z)}]^k \zeta'(z)\zeta'(z)\,df$.

Es ist leicht, diese Integrale durch Polynome s-ten Grades in den Periodizitätsmodulen ω_ν zu approximieren.

Wir können nämlich das Gebiet G in eine endliche Anzahl von Rechtecken zerlegen, so daß sämtliche Verzweigungspunkte auf den Seiten dieser Rechtecke liegen. Dann approximieren wir in jedem dieser Rechtecke $[\zeta(z)]^r [\overline{\zeta(z)}]^k$, $\zeta'(z)$ und $\overline{\zeta'(z)}$ je durch ein Polynom n-ten Grades. Setzen wir diese Approximationspolynome an Stelle der entsprechenden Ausdrücke in $\iint [\zeta(z)]^r [\overline{\zeta(z)}]^k \zeta'(z)\overline{\zeta'(z)}\,df$ ein, so können wir, ähnlich wie früher, die Integrale über die Rechtecke auswerten. Die erhaltenen Ausdrücke werden ähnliche Polynome wie (7). Das Integral über das ganze Gebiet ist die Summe der Integrale genommen über die einzelnen Rechtecke; es läßt sich also in der angegebenen Weise durch ein dem (7) ähnliches Polynom approximieren. Der Unterschied gegenüber der Darstellung (5) von $F_{rk}(\omega)$ besteht darin, daß während wir dort in $F_{rk}(\omega)$ einen genauen Wert von $\iint_G z^r \bar{z}^k\,df$ erhalten haben, wir in unserem allgemeinen Falle das Integral $\iint_G [\zeta(z)]^r [\overline{\zeta(z)}]^k \zeta'(z)\overline{\zeta'(z)}\,df$ durch eine Folge von Polynomen (in ω_ν) nur approximieren können. Wir bezeichnen diese Polynome mit $F_{rk}^{(\sigma)}(\omega)$.

Das Minimalpolynom m-ten Grades $W^{(m)}(z)$ erhalten wir in Form einer Determinante m-ter Ordnung, die beim Grenzübergang $m \to \infty$ die Kreisabbildungsfunktion von G ergibt. Wir können einzelne Koeffizienten der Potenzreihe in z durch unendliche Determinanten, gebildet aus $\iint_G [\zeta(z)]^r [\overline{\zeta(z)}]^k \zeta'(z)\overline{\zeta'(z)}\,df$ ausdrücken. Setzen wir die $F_{rk}^{(\sigma)}(\omega)$ an Stelle der Integrale in die Determinante ein, so haben wir wieder einen doppelten Grenzübergang: Einmal gehen wir mit der Ordnung m der Determinante gegen ∞, und das zweite Mal geht in den Approximationsfolgen $F_{rk}^{(\sigma)}(\omega)$ der Index $\sigma \to \infty$. Man kann den doppelten Grenzübergang, ähnlich wie es bei den Schlitzbereichen geschehen ist, durch einen einfachen ersetzen. Wenn das Gebiet G nur einen Verzweigungspunkt d_1

[7]) Vgl. dazu Bochner: Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen, Math. Zeitschr. **14** (1922), S. 180—207.

besitzt, kann man für die Koeffizienten des Polynomes $F_{rk}^{(\omega)}(\omega)$ ähnliche Ausdrücke wie die $L_s^{(k,r)}$ angeben.

In (4) haben wir eine Darstellungsform des Funktionselementes der Kreisabbildungsfunktion erhalten. Um die gesuchten Relationen aufzustellen, müssen wir zu einer anderen Darstellungsform gelangen, die wir in folgender Weise erhalten.

Es sei uns ein hyperelliptisches Integral erster Gattung

$$(6) \qquad z(t) = \int_0^t \frac{P(t)\left(1-\frac{t}{a_{k+1}}\right)\left(1-\frac{t}{a_{k+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{t}{a_{2p}}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{t}{a_1}\right)\left(1-\frac{t}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{t}{a_k}\right)}}\,dt$$

gegeben. Die a_k sollen sämtlich *reelle* Zahlen bedeuten; $P(t)$ ist ein Polynom [höchstens $(k-p-2)$-ten Grades] mit *reellen* Koeffizienten.

Wir bilden die zu $z(t)$ gehörige Riemannsche Fläche und betrachten die durch die Funktion $z(t)$ vermittelte Abbildung der oberen Halbebene eines Blattes dieser Fläche auf die z-Ebene. Die reelle Achse der t-Ebene wird dabei in die Berandung des neuen Bereiches in der z-Ebene, den wir mit G bezeichnen, übergehen. Bewegt sich der Punkt t längs der reellen Achse von einem Verzweigungspunkt a_{ν_1} bis zu dem nächst benachbarten a_{ν_2}, so hat $f(t)$ in jedem Punkte einen reellen Wert; die einzelnen Wurzelausdrücke $\sqrt{1-\frac{t}{a_\nu}}$ sind entweder reell oder rein imaginär, der Arcus von dt ist auf der Strecke $a_{\nu_1}a_{\nu_2}$ konstant. Es wird somit die Berandung des neu entstandenen Bereiches B aus lauter geraden Linien bestehen, die entweder der reellen oder der imaginären Achse parallel sind. Da $z(t)$ im abgeschlossenen Gebiete (obere Halbebene) mit Ausnahme der Verzweigungspunkte regulär ist, so ist der Polygonzug geschlossen. Bezeichnen wir mit b_ϱ die reellen l-fachen Nullstellen von $P(t)$, so wird in dem Punkte b_ϱ der z-Ebene die Berandung von G einen Winkel aufweisen: Dort beginnt bei ungeradem l ein Schlitz. Bezeichnen wir weiter die Punkte $z(a_\varrho)$ mit A_ϱ, so wollen wir noch bemerken, daß die Periodizitätsmoduln

$$(7) \qquad 2\omega_\nu = \int_{a_{\nu_1}}^{a_{\nu_2}} \frac{P(t)\left(1-\frac{t}{a_{k+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{t}{a_{2p}}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{t}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{t}{a_k}\right)}}\,dt$$

des Integrals durch die Größen $A_{\nu_1}A_{\nu_2}$ gegeben werden. Es sind natürlich nur $2(p-1)$ von diesen Moduln linear unabhängig, wenn $(p-1)$ das Geschlecht des Integrals ist. Zusammenfassend: Das Bild der durch die Ver-

mittlung von $z(t)$ abgebildeten oberen Halbebene eines Blattes der zu $z(t)$ gehörigen Riemannschen Fläche wird ein ganz im Endlichen gelegener, einfach zusammenhängender, im allgemeinen nicht schlichter Schlitzbereich G sein, dessen Berandung ein Polygonzug ist[8]). Die Seiten dieses Polygonzuges und seine Schlitze verlaufen parallel der reellen oder imaginären Achse. Unsere Aufgabe besteht darin, die Beziehungen zu untersuchen, die zwischen den Periodizitätsmoduln $2\omega_\nu$ eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung einerseits und seinen Verzweigungspunkten a_ν andererseits existieren, falls die letzteren sämtlich reelle Zahlen sind. Sind uns die Moduln $2\omega_\nu$ beliebig gegeben, so kann man, wie leicht einzusehen ist, dieselben so reduzieren, daß sie entweder reell oder rein imaginär werden. Ist dies geschehen, so reduziert sich unsere Aufgabe darauf, die Bestimmung der Relationen zu untersuchen, die zwischen den absoluten Beträgen der Perioden einerseits und den a_ϱ andererseits bestehen.

Wir werden in folgender Weise vorgehen: Wir legen den Nullpunkt in einen inneren Punkt von G, der kein Verzweigungspunkt ist. Dann bilden wir als Umkehrung des Integrals (6) das Funktionselement derjenigen Funktion, die G auf die obere Halbebene abbildet. Durch lineare Transformation und eine bestimmte Normierung erhalten wir aus ihr das Funktionselement derjenigen Funktion, die G auf einen Kreis abbildet, im Nullpunkte das Verzerrungsverhältnis 1 hat und die reelle Achse in sich überführt. Die Koeffizienten der einzelnen Potenzen werden als algebraische Funktionen der a_ν erscheinen. Andererseits können wir nach (3) dasselbe Funktionselement auch darstellen als eine Potenzreihe, deren Koeffizienten unendliche Determinanten sind, die von den $\iint_G z^k \bar{z}^r d\omega$ abhängen. Diese Integrale lassen sich, wie wir gesehen haben, sehr einfach als algebraische Funktionen der Periodizitätsmoduln darstellen.

Auf diese Weise erhalten wir dasselbe Funktionselement in zwei verschiedenen Darstellungen, das eine Mal werden die Koeffizienten algebraische Funktionen der Verzweigungspunkte a_ϱ, das zweite Mal werden sie unendliche Determinanten, gebildet aus gewissen algebraischen Kombinationen der Periodizitätsmoduln $2\omega_\nu$ des hyperelliptischen Integrals. Durch Vergleich der beiden Darstellungen erhalten wir eine unendliche Anzahl von Relationen zwischen a_ϱ und $2\omega_\nu$, von denen natürlich nur endlich viele voneinander unabhängig sind.

Wir gehen jetzt zur Durchführung dieses Gedankenganges über: Die aus dem Integral (6) durch Einsetzen von $t = -\frac{s+1}{s-1} i$ entstehende Funktion

[8]) Vgl. Fußnote [3]) S. 13.

$$(8)\qquad z(s)=\int_0^t Q(s)\left[1-\frac{s}{s_1}\right]^{\mu_1}\cdots\left[1-\frac{s}{s_{2p}}\right]^{\mu_{2p}}[1+s]^{-\sum\mu_k-2}\,ds$$

bildet den Einheitskreis auf das Gebiet G ab. Es sind dabei s_k die den Verzweigungspunkten entsprechenden Punkte des Einheitskreises, $-\mu_k\pi$ die zugehörigen Außenwinkel in G (in unserem Falle $-\frac{1}{2}\pi$ oder $-\frac{3}{2}\pi$).

Um die Rechnung zu vereinfachen, setzen wir $Q(s)=1$ und bezeichnen den Ausdruck $\left(\sum_{k=1}^{k=2p}\mu_k-2\right)$ mit μ_{2p+1}. Dabei ist s_{2p+1} gleich (-1).

Entwickeln wir (8) in eine Potenzreihe, so erhalten wir

$$(9)\qquad z(s)=s-\frac{1}{2}\left[\sum'\frac{\mu_k}{s_k}\right]s^2+\frac{1}{3}\left[\sum'\binom{\mu_k}{2}\frac{1}{s_k^2}+\sum'\sum'\frac{\mu_k}{s_k}\frac{\mu_n}{s_n}\right]s^3$$
$$-\frac{1}{4}\left[\sum'\binom{\mu_k}{3}\frac{1}{s_k^3}+\sum'\sum'\binom{\mu_k}{2}\binom{\mu_n}{1}\frac{1}{s_k^2 s_n}+\sum'\sum'\sum'\frac{\mu_k}{s_k}\frac{\mu_n}{s_n}\frac{\mu_l}{s_l}\right]s^4+\ldots,$$

wo $\binom{\mu_k}{\lambda}$ die Binomialkoeffizienten bedeuten. Die Summationen sind dabei von k (bzw. $n, l)=1$ bis k (bzw. $n, l)=(2p+1)$ zu nehmen, bei den zweifachen Summationen sind diejenigen Glieder $\frac{\mu_k}{s_k}\frac{\mu_n}{s_n}$ wegzulassen, wo k gleich n ist, entsprechend bei mehrfachen Summationen diejenigen Glieder, wo zwei oder noch mehr $\frac{\mu_k}{s_k}$ mit gleichem Index vorkommen.

Wir kehren die Potenzreihe (9) um:

$$(10)\qquad s=z+\frac{1}{2}\left(\sum'\frac{\mu_k}{s_k}\right)z^2+\frac{1}{3}\left[\left(\sum'\frac{\mu_k}{s_k}\right)^2+\frac{1}{2}\sum'\frac{\mu_k}{s_k^2}\right]z^3$$
$$+\left[\frac{7}{24}\left(\sum'\frac{\mu_k}{s_k}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\sum'\frac{\mu_k^2}{s_k^2}\right)\left(\sum'\frac{\mu_k}{s_k}\right)-\frac{1}{8}\sum'\frac{\mu_k^3}{s_k^3}+\frac{13}{24}\left(\sum'\frac{\mu_k}{s_k}\right)\left(\sum'\frac{\mu_k}{s_k^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}\sum'\frac{\mu_k^2}{s_k^3}-\frac{1}{3}\sum'\frac{\mu_k}{s_k^3}\right]z^4+\ldots.$$

Wollen wir das Funktionselement derjenigen Funktion erhalten, die G nicht auf den Kreis vom Radius 1, sondern auf den Kreis vom Radius ϱ abbildet, so müssen wir in (10) die s_k durch ϱs_k ersetzen. Wir erhalten dann das Funktionselement derjenigen Funktion, die den Bereich G auf den Kreis vom Radius ϱ abbildet, den Nullpunkt in sich überführt und im Nullpunkte die Ableitung 1 besitzt. Die Ableitung des jetzt erhaltenen Funktionselementes,

$$(11)\qquad w'=1+\left(\sum'\frac{\mu_k}{\varrho s_k}\right)z+\left[\left(\sum'\frac{\mu_k}{\varrho s_k}\right)^2+\frac{1}{2}\sum'\frac{\mu_k}{\varrho^2 s_k^2}\right]z^2+\ldots,$$

und die Potenzreihe (3) sind miteinander identisch. Durch Vergleich der

einzelnen Koeffizienten der beiden Darstellungen erhalten wir folgende Relationen:

$$\sum \frac{\mu_k}{\varrho s_k} = -\lim_{m\to\infty} \begin{vmatrix} F_{01}^{(m)} & F_{21}^{(m)} & \dots & F_{m1}^{(m)} \\ F_{02}^{(m)} & F_{22}^{(m)} & \dots & F_{m2}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{0m}^{(m)} & F_{2m}^{(m)} & \dots & F_{mm}^{(m)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_{11}^{(m)} & F_{21}^{(m)} & \dots & F_{m1}^{(m)} \\ F_{12}^{(m)} & F_{22}^{(m)} & \dots & F_{m2}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{1m}^{(m)} & F_{2m}^{(m)} & \dots & F_{mm}^{(m)} \end{vmatrix}$$

(12)

$$\left(\sum \frac{\mu_k}{\varrho s_k}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum \frac{\mu_k}{\varrho^2 s_k^2} = -\lim_{m\to\infty} \begin{vmatrix} F_{11}^{(m)} & F_{01}^{(m)} & \dots & F_{m1}^{(m)} \\ F_{12}^{(m)} & F_{02}^{(m)} & \dots & F_{m2}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{1m}^{(m)} & F_{0m}^{(m)} & \dots & F_{mm}^{(m)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_{11}^{(m)} & F_{21}^{(m)} & \dots & F_{m1}^{(m)} \\ F_{12}^{(m)} & F_{22}^{(m)} & \dots & F_{m2}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{1m}^{(m)} & F_{2m}^{(m)} & \dots & F_{mm}^{(m)} \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Es bedeuten dabei die $F_{rk}^{(m)}$ die in (5) angegebenen Polynome $(r+k+2)$-ten Grades in ω, und der Radius ϱ wird aus (4) bestimmt.

Aus den in (16) erhaltenen Formeln lassen sich (wie man leicht sieht) die gesuchten Verzweigungspunkte $a_k = -i\frac{s_k+1}{s_k-1}$ bestimmen. Wir wollen, um Beispiele für eine solche Bestimmung zu geben, in zwei Spezialfällen die Rechnung durchführen.

Als 1. Beispiel wählen wir das ellipt. Integral $z(t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)}}$.

Das Gebiet, auf welches die obere Halbebene durch $z(t)$ abgebildet wird, ist ein Rechteck mit den Seiten $2\omega_1$ und $2\omega_2$. Approximieren wir die unendlichen Determinanten durch ihre n-ten Abschnitte und bezeichnen dementsprechend den Approximationswert von $s_1\left(=\frac{a_1+i}{a_1-i}\right)$ mit $s_1^{(n)}$, so lautet (12) in diesem Falle

$$1+\frac{1}{s_1^{(2)2}} = 2\pi\,\frac{3\cdot 5\,(\omega_1^2-\omega_2^2)}{2^6\,\omega_1\omega_2\,(\omega_1^4+5\,\omega_1^2\omega_2^2+\omega_2^4)} \tag{13}$$

$$1+\frac{1}{s_1^{(3)2}} = 2\pi\,\frac{3\cdot 5\cdot 7\,(5\,\omega_1^{10}+64\,\omega_1^8\omega_2^2+27\,\omega_1^6\omega_2^4-27\,\omega_1^4\omega_2^6-64\,\omega_1^2\omega_1^8-5\,\omega_2^{10})}{2^8\,\omega_1\omega_2\,(\omega_1^{12}+35\,\omega_1^{10}\omega_2^2+217\,\omega_1^8\omega_2^4+425\,\omega_1^6\omega_2^6+217\,\omega_1^4\omega_2^8+35\,\omega_1^2\omega_2^{10}+\omega_2^{12})}$$

usw.

Als zweites Beispiel wählen wir das im § 1 betrachtete Gebiet $A_\nu C_\nu HEFL$ der Fig. 1. In diesem Falle ist

$$z(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{1 - \frac{t}{a_6}}\, dt}{\sqrt{\prod_{k=1}^{k=5} \left(1 - \frac{t}{a_k}\right)}}.$$

Für die Bestimmung der s_k müssen wir 6 Gleichungen von der in (16) angegebenen Form aufstellen. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $A_\nu C_\nu$, $C_\nu H$, HE, EF, FL, LA_ν der Reihe nach mit $2\omega_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 6)$ und legen die beiden Koordinatenachsen zu den Seiten $A_\nu L$ und LF parallel. Ist O der Koordinatennullpunkt, so besitzt $\overline{OL}$ den Wert $(\omega_4 + i\omega_1)$. Die $F_{rk}(\omega)$ lauten dann

$$(14) \quad F_{r,k}(\omega) = \sum_{s=1}^{s=k+r+1} \frac{L_s^{(k,r)}}{s(k+r+2-s)} \{[\omega_4^{k+r+2-s} - (\omega_4 - 2\omega_6)^{k+r+2-s}] \cdot$$

$$\cdot [\omega_1^s - (-\omega_1)^s] + [\omega_4^{k+r+2-s} - (-\omega_4)^{k+r+2-s}][(-\omega_1)^s - (\omega_1 - 2\omega_5)^s]\}.$$

Es sei hier bemerkt, daß das hier angegebene Verfahren der Konstantenbestimmung bei den Integralen $\int \Pi \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^{\mu_k} dt$ sich im Falle eines polygonalen Bereiches ohne Schwierigkeiten durchführen läßt. Wenn die in $\int \Pi \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^{\mu_k} dt$ angegebenen μ_k rational sind, und die Abbildungsfunktion ein Integral einer algebraischen Funktion ist, liefert das Verfahren Relationen zwischen den Perioden und Verzweigungspunkten, welche den in (14) für die hyperelliptischen Funktionen abgeleiteten ähnlich sind. Da dabei keine prinzipiellen Schwierigkeiten auftreten, und nur die Rechnung etwas komplizierter wird als in unserem Falle, so gehen wir hier auf diese Betrachtungen nicht näher ein.

§ 3.

Die numerische Auswertung der Integrale.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen die Konstanten a_k bestimmt und somit das Integral

$$(1) \quad \int_0^t \Pi \sqrt{1 - \frac{t}{a_k}}\, dt,$$

welches den Einheitskreis (bzw. die obere Halbebene) auf das Gebiet G abbildet, gefunden haben, bleibt nur übrig, dieses Integral auszuwerten, d. h. eine Methode anzugeben, wie man zu einem beliebigen Punkt der t-Ebene den entsprechenden in der z-Ebene findet.

Die direkte Berechnung von (1) ist so umständlich und zeitraubend, daß man andere Methoden in Betracht ziehen muß, die schneller zum Ziele führen. Es gibt deren zwei:

Die erste Methode besteht im wesentlichen darin, daß man die in (1) auftretende Quadratwurzel im Einheitskreise durch rationale Funktionen approximiert. Dies kann man z. B. erreichen, indem man jedes einzelnes $\sqrt{1-\frac{t}{t_k}} = \sqrt{1+z}$ annähert durch

$$\frac{2^{n-2}\left[\binom{n-1}{1}+2\right]z+2^{n-4}\left[\binom{n-2}{2}+2\binom{n-3}{1}+2\right]z^2+\cdots+2^{n-2S}\left[\binom{n-S}{S}+\cdots+\binom{n-1-2S}{1}+2\right]z^S}{2^n+2^{n-2}\binom{n-1}{1}z+2^{n-4}\binom{n-2}{2}z^2+\cdots+2^{n-2K}\binom{n-K}{K}z^K}$$

wobei bei ungeraden n: $S=\frac{n+1}{2}$, $K=\frac{n-1}{2}$; bei geraden n: $S=\frac{n}{2}$, $K=\frac{n}{2}$ ist.

Diese Ausdrücke sind Approximationspolynome des Kettenbruches $\left(1, \frac{2}{z}, 2\right)$.

Die zweite Methode beruht auf Approximation des hyperelliptischen Integrals (1) durch elliptische Integrale. Man kann zu jedem hyperelliptischen Integral ein anderes herstellen, das sich auf elliptische Integrale reduzieren läßt und dessen Verzweigungspunkte beliebig wenig von denen des ursprünglichen Integrals verschieden sind. Ersetzt man unser Integral (1) durch die betreffende Summe der elliptischen, so wird dadurch die obere Halbebene auf ein Gebiet abgebildet, das nur beliebig wenig von dem Gebiet G verschieden ist. Die Auswertung der elliptischen Integrale für komplexe Werte geschieht mit Hilfe entsprechender Tabellen und Kurven und bietet keine rechnerische Schwierigkeit.

Das eigentliche Problem besteht in diesem Falle in der tatsächlichen Bestimmung des Approximationsintegrals und in der Reduktion desselben.

Es sei bemerkt, daß man auf diesem Wege auch zu einer neuen Methode zur Bestimmnng der Verzweigungspunkte a_k aus den Periodizitätsmoduln gelangen kann. Diese Methode ist natürlich von der im § 2 dieser Arbeit besprochenen verschieden.

Wir gehen in dieser Arbeit auf diese Betrachtungen nicht näher ein, da sie an einer anderen Stelle (l. c.) unter Heranziehung von konkreten Beispielen ausführlicher besprochen werden.

(Eingegangen am 14. April 1922.)

Über die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen innerhalb und auf dem Einheitskreis.

Von

G. Herglotz in Leipzig.

Anläßlich der in dieser Zeitschrift (**14**, S. 110) erschienenen Abhandlung von Herrn A. Cohn sei es mir gestattet, im folgenden eines Herleitungsverfahrens der betreffenden Tatsachen Erwähnung zu tun, welches dieselben einem allgemeinen Satze über den Cauchyschen Index für den Einheitskreis entnimmt, und so den entsprechenden Betrachtungen von A. Hurwitz (Mathematische Annalen **46**, S. 273) für die reelle Achse koordiniert erscheint.

1. Rang und Signatur der Hermiteschen Formen F_n.

Sei die rationale Funktion:

$$W(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = \frac{V_0 + V_1 z + \ldots + V_p z^p}{U_0 + U_1 z + \ldots + U_p z^p}; \qquad U_p, V_p \neq 0, \tag{1}$$

längs des Einheitskreises reell, also:

$$U(z)\,\overline{V}\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{U}\left(\frac{1}{z}\right) V(z), \tag{2}$$

wobei allgemein der Querstrich über einer Zahl deren konjugiert komplexen Wert, und über einem Funktionszeichen den mit konjugiert komplexen Koeffizienten, aber ungeänderter Variablen gebildeten Ausdruck anzeige, so ist das in positivem Sinne längs des Randes eines, alle Pole der Anzahl $q \leqq p$ von $W(z)$ einschließenden Kreisringes: $r \leqq |z| \leqq R$ genommene Integral:

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int W(z)\, X(z)\, Y\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= X_0 + X_1 z + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}, \\ Y(z) &= Y_0 + Y_1 z + \ldots + Y_{n-1} z^{n-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

vermöge der beiden Entwicklungen von $W(z)$:

$$(5) \qquad i\,W(z) \begin{cases} A + \frac{1}{2}A_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda \frac{1}{z^\lambda}, & z \geqq R, \\ A - \frac{1}{2}A_0 - \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{-\lambda} z^\lambda, & |z| \leqq r, \end{cases}$$

$$(5\,a) \qquad A_{-\lambda} = \bar{A}_\lambda,$$

unmittelbar als die Hermitesche Form der n Variablenpaare $(X_\nu\ Y_\nu)$ zu erkennen:

$$(6) \qquad F_n = \sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} A_{\mu-\nu} X_\mu Y_\nu.$$

Insbesondere erweist sich F_p mit der dem Einheitskreis angepaßten Bezoutiante von $U(z)$, $V(z)$ äquivalent. Wählt man nämlich:

$$(7) \qquad X(z) = \frac{U(z) - U(x)}{z - x}, \qquad Y(z) = \frac{\bar{U}(z) - \bar{U}(y)}{z - y},$$

also:

$$(8) \qquad X_\nu = \left[\frac{1}{x^{\nu+1}} U(x)\right], \qquad Y_\nu = \left[\frac{1}{y^{\nu+1}} \bar{U}(y)\right],$$

wo die [ ] stets den ganzen Teil des betreffenden Ausdrucks anzeigen soll, so wird wegen Gl. (2):

$$(9) \qquad \frac{1}{z} W(z) X(z) Y\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{U(z)\bar{V}\left(\frac{1}{z}\right) - U(x)\bar{V}\left(\frac{1}{z}\right) - \bar{U}(y)V(z)}{(z-x)(1-zy)} + \frac{U(x)\bar{U}(y)W(z)}{(z-x)(1-zy)},$$

wo nun, $|x|, \left|\frac{1}{y}\right| > R$ gedacht, der erste Teil innerhalb des Kreisringes regulär ist, während der zweite außerhalb nur die beiden Pole $z = x$, $\frac{1}{y}$ besitzt, so daß sich F_p ergibt:

$$(10) \qquad f_p = i\frac{U(x)\bar{V}(y) - V(x)\bar{U}(y)}{1 - xy} = \sum_{\mu,\nu=0}^{p-1} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Dies besagt aber, daß die Gl. (8) als konjugiert komplexe lineare Transformationen der Determinanten U_p^p, U_p^p der Variablen X_ν, Y_ν auf bzw. $x_\nu = x^\nu$, $y_\nu = y^\nu$ aufgefaßt, die Form $F_p = \sum_{\mu,\nu=0}^{p-1} A_{\mu-\nu} X_\mu Y_\nu$ in die Form $\sum_{\mu,\nu=0}^{p-1} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ überführen. Schreibt man übrigens f_p in der Form:

$$(10\,a) \qquad i f_p = -\frac{U(x) - U\left(\frac{1}{y}\right)}{1 - xy}\bar{V}(y) + \frac{V(x) - V\left(\frac{1}{y}\right)}{1 - xy} U(y),$$

beachtet, daß:

$$(11)\qquad \frac{U(x)-U(y)}{x-y} = \frac{1}{x}U(x) + y\left[\frac{1}{x^2}U(x)\right] + \ldots + y^{p-1}\left[\frac{1}{x^p}U(x)\right]$$

ist und sich negative y-Potenzen im Ausdruck von f_p wegheben müssen, so folgt gleich die später zu verwendende Darstellung:

$$(12)\qquad i f_p = \sum_{\nu=1}^{p}\left[\frac{1}{x^\nu}U(x)\right]\left[\frac{1}{y^\nu}V(y)\right] - \left[\frac{1}{x^\nu}V(x)\right]\left[\frac{1}{y^\nu}U(y)\right].$$

Für die Formen F_n $(n \geqq q)$ gilt nun diese Tatsache:

Der Rang $\varrho = \pi + \nu$ und die Signatur $\sigma = \pi - \nu$ der Form F_n $(n \geqq q)$ sind gleich der Anzahl q der Pole von $W(z)$ und dem Index $J(W)$ von $W(z)$ längs des Einheitskreises:

$$(13)\qquad \varrho = \pi + \nu = q, \qquad \sigma = \pi - \nu = J(W), \qquad \text{für} \quad n \geqq q,$$

und dies gilt wegen $p \geqq q$ insbesondere stets für F_p und also auch f_p.

Der Wert des Ranges ϱ läßt sich ohne weiteres der Bemerkung entnehmen, daß die Forderung:

$$(14)\qquad F_n \equiv 0, \quad \text{identisch in } Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1},$$

genau $n - \varrho$ linear unabhängige Gleichungen für $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ liefert. Denn sie ist gleichbedeutend mit der anderen:

$$(15)\qquad \int W(z)\,X(z)\,Y\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = 0, \text{ für alle Polynome } Y(z) \text{ vom Grad} \leqq n-1,$$

und hierzu ist sicher hinreichend, daß $X(z)$ durch den Nenner $U^*(z)$ des Grades q von $W(z)$ teilbar sei, aber auch notwendig, da man andernfalls wegen $n - 1 \geqq q - 1$, $Y(z)$ so wählen könnte, daß der Integrand an einer Nullstelle von $U^*(z)$ von 1. Ordnung unendlich wird und an allen übrigen endlich bleibt.

Die Teilbarkeit von $X(z)$ durch $U^*(z)$ liefert aber genau $n - q$ linear unabhängige Gleichungen zwischen den Koeffizienten X_ν.

Der Wert der Signatur σ läßt sich nunmehr dem Umstande entnehmen, daß der Ausdruck des Integrals Gl. (3) für F_n als Residuensumme in den q Polen von $W(z)$ gerade die kanonische Darstellung von F_n durch $\varrho = q$ Paare konjugiert komplexer Linearformen von X_ν bzw. Y_ν liefert.

Es sind hierzu gesondert zu betrachten die Beiträge: A. zweier r-facher bezüglich des Einheitskreises symmetrischer Pole $z_0, \frac{1}{\bar{z}_0}$, und B. eines r-fachen Poles z_0 auf dem Einheitskreis.

A. $z_0, \frac{1}{\bar{z}_0}$, r-fache Pole; $|z_0| < 1$, $1 - |z_0|^2 = c^2$; $r + s = n$.

Zur Berechnung der Residuensumme führe man ein:

$$\zeta = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \qquad z = \frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0 \zeta} \tag{16}$$

und bilde:

$$\left(\frac{c}{(\zeta + z_0)\left(\frac{1}{\zeta} + \bar{z}_0\right)}\right)^n W\left(\frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0 \zeta}\right) = \begin{cases} -i\,\zeta^s W'(\zeta) \\ +i\,\frac{1}{\zeta^s}\,\overline{W}'\left(\frac{1}{\zeta}\right), \end{cases} \tag{17}$$

$$W'(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots, \qquad c_0 \neq 0,$$

$$\left(\frac{1 + \bar{z}_0\zeta}{c}\right)^{n-1} X\left(\frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0\zeta}\right) = X'(\zeta), \tag{18}$$

$$\left(\frac{1 + z_0\zeta}{c}\right)^{n-1} Y\left(\frac{\zeta + z_0}{1 - z_0\zeta}\right) = Y'(\zeta),$$

so wird der Beitrag beider Pole zu F_n zunächst:

$$(F_n)_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} W'(\zeta)\,X'(\zeta)\,Y'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^{1-s}} - \frac{1}{2\pi i}\int_{(\infty)} \overline{W}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)X'(\zeta)\,Y'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^{1-s}}. \tag{19}$$

Wegen $n \geqq q \geqq 2r$ ist aber $r \leqq \frac{n}{2} \leqq s$, setzt man also:

$$\left[\frac{1}{\zeta^s}X'(\zeta)\right] = \sum_{\nu=0}^{r-1} X''_\nu \zeta^\nu, \qquad W'(\zeta)\,X'(\zeta) \equiv \sum_{\nu=0}^{r-1} X''_{r+\nu}\zeta^\nu \pmod{\zeta^r},$$

$$\left[\frac{1}{\zeta^s}Y'(\zeta)\right] = \sum_{\nu=0}^{r-1} Y''_\nu \zeta^\nu, \qquad \overline{W}'(\zeta)\,Y'(\zeta) \equiv \sum_{\nu=0}^{r-1} Y''_{r+\nu}\zeta^\nu \pmod{\zeta^r}, \tag{20}$$

so ergibt sich unschwer:

$$(F_n)_0 = \sum_{\nu=0}^{r-1}(X''_\nu Y''_{r+\nu} + X''_{r+\nu}Y''_\nu), \tag{A}$$

wo offenbar X''_ν, Y''_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, 2r-1)$ $2r$ Paare konjugiert komplexer Linearformen in X_ν bzw. Y_ν sind.

B. z_0, *r-facher Pol*, $|z_0| = 1$.

Zur Berechnung des Residuums führe man ein:

$$\zeta = \frac{1}{i}\,\frac{z - z_0}{z + z_0} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}, \qquad z = e^{i\vartheta}, \qquad z_0 = e^{i\vartheta_0} \tag{21}$$

und bilde:

$$-\frac{\zeta^r}{(\zeta^2+1)^n}\,W\left(\frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}\,z_0\right) = W'(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots \tag{22}$$

$$c_0 \neq 0, \qquad c_0, c_1, c_2, \ldots \text{ reell},$$

$$(23)\qquad \begin{aligned}(1-i\zeta)^{n-1}X\Big(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}z_0\Big)&=X'(\zeta),\\ (1+i\zeta)^{n-1}Y\Big(\frac{1-i\zeta}{1+i\zeta}\bar z_0\Big)&=Y'(\zeta),\end{aligned}$$

so wird der Beitrag des Poles zu F_n zunächst:

$$(24)\qquad (F_n)_0=\frac{1}{\pi i}\int_{(0)}W'(\zeta)X'(\zeta)Y'(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^r}.$$

Nunmehr sind aber die Fälle eines geraden oder ungeraden r zu trennen und $n\geqq q\geqq r$ zu beachten:

B_0. $r=2l$. Man setze:

$$(25)\qquad \begin{aligned}X'(\zeta)&\equiv\sum_{\nu=0}^{l-1}X''_\nu\zeta^\nu, \quad (\mathrm{mod}\ \zeta^l)\\ \Big[\frac{1}{\zeta^l}W'X'\Big]&=W'\Big[\frac{1}{\zeta^l}X'\Big]\equiv\zeta^{l-1}\sum_{\nu=0}^{l-1}X''_{l+\nu}\frac{1}{\zeta^\nu}, \quad (\mathrm{mod}\ \zeta^l)\end{aligned}$$

und genau ebenso in Y,

und erhält:

$$(B_0)\qquad (F_n)_0=\sum_{\nu=0}^{l-1}(X''_\nu Y''_{l+\nu}+X''_{l+\nu}Y''_\nu).$$

B_1. $r=2l+1$. Man setze:

$$(26)\qquad \begin{aligned}X'(\zeta)&\equiv\sum_{\nu=0}^{l-1}X''_\nu\zeta^\nu+X''_{2l}\zeta^l, \quad (\mathrm{mod}\ \zeta^{l+1})\\ \zeta\Big[\frac{1}{\zeta^{l+1}}W'X'\Big]&+W'\Big[\frac{1}{\zeta^l}X'\Big]\equiv\zeta^l\sum_{\nu=0}^{l-1}X''_{l+\nu}\frac{1}{\zeta^\nu}+c_0X''_{2l}, \quad (\mathrm{mod}\ \zeta^{l+1})\end{aligned}$$

und genau ebenso in Y,

und erhält jetzt:

$$(B_1)\qquad (F_n)_0=\sum_{\nu=0}^{l-1}(X''_\nu Y''_{l+\nu}+X''_{l+\nu}Y''_\nu)+2c_0X''_{2l}Y''_{2l},$$

und beidemal sind die X''_ν, Y''_ν $(\nu=0,1,\ldots,r-1)$ r Paare konjugiert komplexer Linearformen in X_ν bzw. Y_ν. Sammelt man jetzt die Beiträge sämtlicher Pole von $W(z)$, so erhält man die kanonische Darstellung von F_n in genau $q=\varrho$ Paaren konjugiert komplexer Linearformen der X_ν bzw. Y_ν, welche unmittelbar den Wert der Signatur $\sigma=\Sigma c_0$ ergibt, wo sich die Summe auf alle dem Einheitskreis angehörigen Pole ungerader Ordnung (Fall B_1) erstreckt. Eben dies aber ist nach Gl. (21), (22) der Wert des Index von $W(z)$ längs des Einheitskreises.

2. Anwendung auf die Wurzelanzahlen innerhalb und auf dem Einheitskreis.

Sei erstens $U(z)$ ein Polynom p-ten Grades mit der Eigenschaft:

$$z^p U\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{U}(z) \tag{27}$$

und man wähle:

$$i V(z) = -\frac{p}{2} U(z) + z U'(z), \quad i W(z) = -\frac{p}{2} + z \frac{d}{dz} \lg U(z), \tag{28}$$

so werden die Koeffizienten A_λ in Gl. (5) die Potenzsummen s_λ der Wurzeln von $U(z)$, also:

$$F_n = \sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} s_{\mu-\nu} X_\mu Y_\nu \tag{29}$$

und ferner:

$$F_p = \frac{p U(x) U(y) - x U'(x) \overline{U}(y) - y U(x) \overline{U}'(y)}{1 - xy} = \sum_{\mu,\nu=0}^{p-1} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu . \tag{30}$$

Bedeuten dann $N_i^* = N_a^*$, N_k^* die Wurzelanzahlen von $U(z)$ innerhalb, außerhalb und auf dem Einheitskreis, dabei mehrfache Wurzeln stets nur einmal gezählt, so ist unmittelbar $q = 2 N_i^* + N_k^*$, $J(W) = N_k^*$ und es gilt sonach für die Formen F_n $(n \geqq q)$, insbesondere also auch für die Form $\sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$:

$$\pi = N_i^* + N_k^*, \quad \nu = N_i^*, \quad \text{für} \quad n \geqq q . \tag{31}$$

Sei zweitens $G(z)$ ein beliebiges Polynom m-ten Grades

$$G(z) = C_0 + C_1 z + \ldots + C_m z^m, \quad C_m \neq 0, \tag{32}$$

und man wähle:

$$\begin{aligned} U(z) &= z^m G(z) + z^m \overline{G}\left(\frac{1}{z}\right) \\ i V(z) &= z^m G(z) - z^m \overline{G}\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned} \qquad p = 2m, \tag{33}$$

so daß

$$2 G(z) = \frac{1}{z^m} U(z) + i \frac{1}{z^m} V(z) \tag{34}$$

längs des Einheitskreises die Zerlegung von $G(z)$ in Real- und Imaginärteil liefert.

Sind dann N_i, N_a, N_k die Wurzelanzahlen von $G(z)$ innerhalb, außerhalb und auf dem Einheitskreis, und $N_k + 2S$ die Anzahl gemeinsamer Wurzeln von $G(z)$ und $z^m \overline{G}\left(\frac{1}{z}\right)$, so ist zunächst:

$$q = 2m - N_k - 2S, \tag{35}$$

ferner, das längs des Einheitskreises genommene Integral als Hauptwert gemeint:

$$\begin{aligned} &\int d \lg G(z) = (2N_i + N_k)\pi i \\ &\int d \lg G(z) = i \int d \operatorname{arctg} \frac{V}{U} = J(W)\pi i, \end{aligned} \tag{36}$$

also:

$$J(W) = 2N_i + N_k, \tag{35a}$$

und es gilt daher für die Formen F_n $(n \geqq q)$:

$$\pi = N_i - S + m, \qquad \nu = N_a - S, \qquad \text{für} \quad n \geqq q, \tag{37}$$

also insbesondere auch für die durch f_p gegebene Form $\sum_{\mu,\nu=0}^{p-1} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$.

Verwendet man aber für f_p $(p = 2m)$ die Darstellung Gl. (12), so ist in dieser für $\nu = 1, 2, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{z^\nu} U(z)\right] = z^{m-\nu} G(z) + \left[z^{m-\nu} \bar{G}\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad \left[\frac{1}{z^{m+\nu}} U(z)\right] = \left[\frac{1}{z^\nu} G(z)\right] \\ &i\left[\frac{1}{z^\nu} V(z)\right] = z^{m-\nu} G(z) - \left[z^{m-\nu} \bar{G}\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad i\left[\frac{1}{z^{m+\nu}} V(z)\right] = \left[\frac{1}{z^\nu} G(z)\right] \end{aligned} \tag{38}$$

und daher wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f_{2m} = &\sum_{\nu=1}^{m} \left[\frac{1}{x^\nu} G(x)\right]\left[\frac{1}{y^\nu} G(y)\right] - \left[x^{m-\nu} G\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left[y^{m-\nu} G\left(\frac{1}{y}\right)\right] \\ &+ \sum_{\nu=1}^{m} x^{m-\nu} G(x)\, y^{m-\nu} \bar{G}(y). \end{aligned} \tag{39}$$

Danach führen die konjugiert komplexen Transformationen der Determinanten C_m^m, $\bar{C}_m^m$:

$$\begin{aligned} x_\nu' &= C_0 x_\nu + C_1 x_{\nu+1} + \ldots + C_m x_{\nu+m} \\ y_\nu' &= \bar{C}_0 y_\nu + \bar{C}_1 y_{\nu+1} + \ldots + \bar{C}_m y_{\nu+m} \end{aligned} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{40}$$

die Form $\sum_{\mu,\nu=0}^{2m-1} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ der $2m$ Variablenpaare $(x_\nu y_\nu)$, $(\nu = 0, 1, \ldots, 2m-1)$ über in die Summe zweier Formen von je m Variablenpaaren $(x_\nu y_\nu)$, $(\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$ und $(x_\nu' y_\nu')$, $(\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$:

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=0}^{2m-1} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu = g(x_0, \ldots, x_{m-1} \mid y_0, \ldots, y_{m-1}) + \sum_{\nu=1}^{m-1} x_\nu' y_\nu', \tag{41}$$

von denen die erste gerade die Schursche Form ist, während für die zweite Rang und Signatur den Wert m besitzen, so daß für die charakteristischen Zahlen π_0, ν_0 der Schurschen Form allgemein gilt:

$$\pi_0 = N_i - S, \qquad \nu_0 = N_a - S. \tag{42}$$

3. Vergleich mit den Sätzen über Wurzelanzahlen oberhalb und auf der reellen Achse.

Sei es schließlich noch, den Parallelismus der hier zur Feststellung der Lage der Wurzeln gegenüber dem Einheitskreis benutzten Formen, mit den insbesondere von Hurwitz für die gleiche Untersuchung bezüglich der reellen Achse verwandten, hervortreten zu lassen, gestattet die folgenden Tatsachen zu erinnern, deren, durch die vorigen Überlegungen mitbewiesene allgemeine Formulierbarkeit, vielleicht auch bisher nicht ausdrücklich hervorgehoben wurde[1]).

Sei die rationale Funktion:

$$W(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = \frac{V_0 + V_1 z + \ldots + V_p z^p}{U_0 + U_1 z + \ldots + U_p z^p}, \qquad U_p \neq 0, \tag{43}$$

längs der reellen Achse reell, so ist bekanntlich nach Hurwitz das in positivem Sinne längs des Randes eines alle Pole der Anzahl $q \leqq p$ von $W(z)$ einschließenden Kreises $|z| \leqq R$ genommene Integral:

$$F_n = \frac{1}{2\pi i} \int W(z)\, X(z)\, Y(z)\, dz; \tag{44}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= X_0 + X_1 z + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}, \\ Y(z) &= Y_0 + Y_1 z + \ldots + Y_{n-1} z^{n-1} \end{aligned} \tag{45}$$

vermöge der Entwicklung:

$$W(z) = A + \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda \frac{1}{z^{\lambda+1}}, \qquad |z| \geqq R, \tag{46}$$

als reelle, symmetrische Bilinearform der n Variablenpaare (X_μ, Y_ν) zu erkennen:

$$F_n = \sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} A_{\mu+\nu} X_\mu Y_\nu. \tag{47}$$

Insbesondere erweist sich F_p mit der gewöhnlichen Bezoutiante von $U(z)$, $V(z)$ als äquivalent, da bei der Wahl:

$$X(z) = \frac{U(z) - U(x)}{z - x}, \qquad Y(z) = \frac{U(z) - U(y)}{z - y} \tag{48}$$

sich analog wie in Nr. 1 für F_p ergibt:

$$f_p = \frac{U(x)\, V(y) - V(x)\, U(y)}{x - y} = \sum_{\mu,\nu=0}^{p-1} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu. \tag{49}$$

Die geringfügig abgeänderten Überlegungen von Nr. 1, 2 erweisen dann die Allgemeingültigkeit der Tatsache:

[1]) Vgl. H. Weber, Algebra **1**, S. 318, 335; Hurwitz, Math. Annalen **46** (1895), S. 273.

Der Rang $\varrho = \pi + \nu$ und die Signatur $\sigma = \pi - \nu$ der Formen $F_n (n \geqq q)$ sind gleich der Anzahl q der Pole von $W(z)$ und dem negativen Werte des Index $J(W)$ von $W(z)$ längs der reellen Achse:

$$(50) \qquad \varrho = \pi + \nu = q, \quad \sigma = \pi - \nu = -J(W), \quad \text{für} \quad n \geqq q,$$

und dies gilt also wegen $p \geqq q$ insbesondere stets für die Bezoutiante $\sum_{\mu,\nu=0}^{p-1} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ von $U(z)$, $V(z)$.

Setzt man für $W(z)$ die logarithmische Ableitung eines reellen Polynoms p-ten Grades $U(z)$, so folgt für die mit den Potenzsummen s_λ der Wurzeln von $U(z)$ gebildeten Formen:

$$(51) \qquad F_n = \sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} s_{\mu+\nu} X_\mu Y_\nu$$

$$(52) \qquad \pi = N_o^* + N_r^*, \quad \nu = N_o^*, \quad \text{für } n \geqq 2N_o^* + N_r^*,$$

falls $N_o^* = N_u^*$, N_r^* die Wurzelanzahlen von $U(z)$ oberhalb, unterhalb und auf der reellen Achse sind, mehrfache Wurzeln immer nur einmal gezählt, und dies gilt insbesondere für die Bezoutiante von $U(z)$, $U'(z)$.

Ist ferner $G(z)$ ein beliebiges Polynom m-ten Grades:

$$(53) \qquad G(z) = C_0 + C_1 z + \ldots + C_m z^m, \qquad C_m + \bar{C}_m \neq 0,$$

und setzt man:

$$(54) \qquad U(z) = G(z) + \bar{G}(z), \qquad iV(z) = G(z) - \bar{G}(z),$$

so daß

$$(55) \qquad 2G(z) = U(z) + iV(z)$$

längs der reellen Achse die Zerlegung von $G(z)$ in Real- und Imaginärteil liefert, so folgt für die Formen F_n:

$$(55) \qquad \pi = N_u - S, \quad \nu = N_o - S, \quad \text{für } n \geqq N_o + N_u - 2S$$

falls N_o, N_u, N_r die Wurzelanzahlen von $G(z)$ oberhalb, unterhalb und auf der reellen Achse und $N_r + 2S$ die Anzahl der gemeinsamen Wurzeln von $G(z)$ und $\bar{G}(z)$ bezeichnen. Dies gilt insbesondere für F_m also die Bezoutiante $\sum_{\mu,\nu=0}^{m-1} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ von $G(z)$ und $\bar{G}(z)$:

$$(57) \qquad f_m = 2i \frac{G(x)\bar{G}(y) - \bar{G}(x)G(y)}{x - y} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m-1} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

(Eingegangen am 1. Januar 1923.)

Umbral symmetric functions and algebraic analogues of the Bernoullian and Eulerian numbers and functions.

By

E. T. Bell in Washington.

We treat generalizations of the numbers of Bernoulli, Euler, Genocchi and Lucas in which the numbers of rank n are replaced by rational algebraic functions in n independent variables. The functions for unit values of all the variables degenerate to the numbers. There also is indicated a corresponding extension of the Bernoullian and Eulerian functions of Raabe, Schlömilch, Worpitzky[1]), Glaisher[2]) and others. All are obtained from an umbral interpretation of the ordinary symmetric functions which Kronecker[3]) took as his starting point for obtaining expressions of the Bernoullian numbers as functions of complex roots of unity. The generalized recurrences and other relations are shown to be of the same form as those for the ordinary numbers and functions; the interpretations are, of course, wholly different. The theory can be regarded as an algebra of formal relations between power series in a single variable. It is most rapidly developed by an adaptation to umbral hyperbolic functions of the symbolic method devised by Blissard[4]) and elaborated independently by Lucas in his *Théorie des Nombres*.

1. Umbral Hyperbolic and Symmetric Functions.

§ 1. For clearness we first recall some essentials of Blissard's method. The letters $x, y, \ldots, z, u, v, \ldots, w$ denote ordinary algebraic quantities, or ordinaries. Without suffixes, $a, b, \ldots, c, p, q, \ldots, r$ denote umbrae,

[1]) Worpitzky: Journal für die reine und angewandte Mathematik **94**, p. 203—232 gives full references to earlier writers.

[2]) Glaisher: Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **29**, p. 1–169; **42**, p. 86—157.

[3]) Journal des Mathématiques pures et appliquées (2) **1**, p. 385—391.

[4]) Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **6—9**.

and e is the Naperian base. Powers $a^0, a^1, a^2, \ldots$, of the umbra a are umbral, and represent the ordinaries $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Algebraic operations upon umbral powers are performed as if the powers were ordinary until the last step, when exponents are degraded to suffixes. Zero exponents must always be indicated explicitly. If in any umbral expression enclosed in parentheses the same umbra occurs precisely n times it is replaced by n different umbrae until after the degradation of exponents. Thus $(a-a)^2$ is first written $(a-b)^2$, which is umbrally equal to $a^2b^0 - 2a^1b^1 + a^0b^2$, and hence $(a-a)^2 = 2(a_2a_0 - a_1^2)$. No confusion can arise between umbral and ordinary formulas if it be noted that all powers of $a, b, \ldots, c, p, q, \ldots, r$ without suffixes, such as $a^m, \ldots, r^n$ are umbrae, with suffixes, $a_i^m, \ldots, r_j^s$, ordinaries; and that $x, y, \ldots, z, u, v, \ldots, w$ are always ordinaries. Further details with numerous illustrations of the method will be found in the cited works of Blissard and Lucas.

§ 2. Combining two operations we shall perform umbral multiplication, indicated by a dot, $a_m \cdot a_n$, directly by the addition of suffixes, a_{m+n}. Suffixes playing the analogous role of exponents in ordinary multiplication, dot multiplication is subject to all the formal laws of common algebra; $a_m \cdot (a_t + a_s) = a_{m+t} + a_{m+s}$, and so on. Multiplication without the dot is ordinary, $a_m(a_t + a_s) = a_m a_t + a_m a_s$. To indicate that after the degradation of exponents each of the $\varkappa$ letters $a, b, \ldots, c$ in the umbral function $f(a, b, \ldots, c)$ has been replaced by a, we write $f(\varkappa \cdot a)$. Thus $(3\cdot a)^2$ is obtained from $(a+b+c)^2$, and its value is $3(a_0^2 a_2 + 2a_0 a_1^2)$. The absence of a dot in such functions indicates an ordinary multiplication. For example, $(2a+3b)^2 = 4a_2b_0 + 12a_1b_1 + 9a_0b_2$.

§ 3. The umbral multinomial theorem is

$$(xa + yb + \ldots + zc)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\gamma!} x^\alpha y^\beta \ldots z^\gamma a_\alpha b_\beta \ldots c_\gamma,$$

the summation extending to all integers $\alpha, \beta, \ldots, \gamma \geqq 0$ whose sum is the integer $n \geqq 0$. In particular if $x, y, \ldots, z$ are all different from zero,

$$(xa + yb + \ldots + zc)^0 = a_0 b_0 \ldots c_0.$$

The umbral exponential formula is

$$\exp ax = e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \qquad (0! = 1).$$

Now, until it is specified, the meaning of e^{-ax} is ambiguous. We shall take by definition

$$\exp(-ax) = e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \frac{x^n}{n!}.$$

On the other hand the result of dividing unity by e^{ax} as above defined will be written $\frac{1}{e^{ax}}$. Hence $e^{-ax} \neq \frac{1}{e^{ax}}$ unless $a_n = 1$ for all values of the integer $n \geqq 0$.

The umbral hyperbolic sine of ax is defined by

$$\text{sh } ax = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

the umbral hyperbolic cosine by

$$\text{ch } ax = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

and the result of dividing $\text{sh } ax$ by $\text{ch } ax$ is written $\text{th } ax$; the results of dividing unity by $\text{sh } ax$, $\text{ch } ax$, $\text{th } ax$ respectively are written $\text{hs } ax$, $\text{hc } ax$, $\text{ht } ax$. It may be assumed (although for our purpose it strictly is unnecessary) that such a value x' of x is chosen in these series that for $|x| \leqq |x'|$ the series converge absolutely. From the definitions we have

$$\text{ch } ax = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}), \qquad \text{sh } ax = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}).$$

By § 1, $\text{ch}^n ax$, $n > 0$ an integer, is obtained by multiplying together n functions $\text{ch } ax$, $\text{ch } bx, \ldots$, rearranging the result into a power series in x, and finally replacing each letter $a, b, \ldots$ by a. Similarly for positive integral powers of the other umbral functions.

§ 4. A power series in x is called odd, even, or mixed according as it involves only odd, only even, or both odd and even powers of x. By the appropriate change in notation any odd series can be written $\text{sh } ax$, any even series $\text{ch } ax$, and any mixed series $\exp ax$. Note that in particular there is no necessary relation between $\text{sh } ax$, $\text{ch } ax$. It follows that by the appropriate changes in notation the result of dividing formally any odd series by any even series can be written $\text{th } ax$, the result of dividing any even series by any odd series can be written $\text{ht } ax$, and the respective reciprocals of any even series, of any odd series can likewise be written $\text{hc } ax$, $\text{hs } ax$. Conversely, umbral hyperbolic trigonometry can be interpreted as the algebra of power series in a single variable. There is a multiple extension of this which is of interest, but we do not consider it here.

§ 5. The functions defined in § 3 give rise to an extension of ordinary symmetric functions. The umbral $f(a, b, \ldots, c)$ when written out fully in ordinary notation becomes a function of letters $a, b, \ldots, c$ with certain

suffixes. Suppose that there are the same number μ of letters of each kind $a, b, \ldots, c$ and let these be

$$a_{g(j)}, \quad b_{g(j)}, \quad \ldots, \quad c_{g(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

where $g(j)$ $(j = 1, 2, \ldots, \mu)$ are all different integers $\geqq 0$. Then if $f(a, b, \ldots, c)$ is invariant under the substitution

$$\begin{pmatrix} a_{g(1)}, & a_{g(2)}, & \ldots, & a_{g(\mu)} \\ b_{g(1)}, & b_{g(2)}, & \ldots, & b_{g(\mu)} \end{pmatrix},$$

$f(a, b, \ldots, c)$ is called symmetric in a, b; if $f(a, b, \ldots, c)$ is symmetric in each pair of umbrae chosen from among $a, b, \ldots, c$, it is called a symmetric function of $a, b, \ldots, c$. For example,

$$x(a_0 b_0 c_4 + a_0 b_4 c_0 + a_0 b_0 c_4) + y(a_2 b_2 c_0 + a_2 b_0 c_2 + a_0 b_2 c_2)$$

is a symmetric function of a, b, c. When $a_n \quad \alpha^n$, $b_n \quad \beta^n$, $\ldots$, $c_n \quad \gamma^n$, where $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ are ordinaries, the definition becomes that of an ordinary symmetric function.

To avoid repetition we assume henceforth that *there are precisely* $\varkappa$ *umbrae in the set* $a, b, \ldots, c$ *and* ϱ *in the set* $p, q, \ldots, r$.

§ 6. Define the χ-function of rank n of the two sets of umbrae $a, b, \ldots, c$ and $p, q, \ldots, r$ by

$$(1) \quad 2^{\varkappa+\varrho}\chi_n(a, b, \ldots, c; p, q, \ldots, r) \quad \sum{}' \pm(\pm a \pm b \pm \ldots \pm c \pm p \pm q \pm \ldots \pm r)^n,$$

in which the Σ extends to the $2^{\varkappa+\varrho}$ combinations of plus and minus signs within the parentheses, and the outer sign is in each case the product of the signs of $p, q, \ldots, r$. This function is symmetric separately in each of the sets $a, b, \ldots, c$ and $p, q, \ldots, r$. For it is the coefficient $x^n/n!$ in the expansion of

$$2^{\varkappa+\varrho}(e^{ax} + e^{-ax}) \ldots (e^{cx} + e^{-cx})(e^{px} - e^{-px}) \ldots (e^{rx} - e^{-rx}).$$

The product of ϱ odd series is an even or an odd series according as ϱ is even or odd. Hence

$$(2) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx \ldots \operatorname{ch} cx \operatorname{sh} px \operatorname{sh} qx \ldots \operatorname{sh} rx \\ \quad \begin{cases} \operatorname{ch} \chi(a, b, \ldots, c; p, q, \ldots, r)x & \text{if } \varrho \text{ is even,} \\ \operatorname{sh} \chi(a, b, \ldots, c; p, q, \ldots, r)x & \text{if } \varrho \text{ is odd.} \end{cases} \end{cases}$$

It follows that all the coefficients in $\chi_n(\,)$ are positive integers, and that this function vanishes identically when $n < \varrho$ (provided $\varrho > 0$), and when n, ϱ are of opposite parities.

When $\varrho = 0$ we write (1) in the form

$$(3) \qquad 2^{\varkappa}\varphi_n(a, b, \ldots, c) = \sum{}'(\pm a \pm b \pm \ldots \pm c)^n,$$

of which the umbral generator is

$$\operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx \dots \operatorname{ch} cx = \operatorname{ch} \varphi(a, b, \dots, c)x. \tag{4}$$

This function vanishes identically when n is odd. The special case in which $a_n = \alpha^n$, $b_n = \beta^n$, $\dots$, $c_n = \gamma^n$ and $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ are ordinaries gives the first of Kronecker's systems of ordinary symmetric functions.

When $\varkappa = 0$ we write (1) in the form

$$2^{\varrho}\psi_n(p, q, \dots, r) = \sum \pm (\pm p \pm q \pm \dots \pm r)^n, \tag{5}$$

so that the umbral generators are

$$\operatorname{sh} px \operatorname{sh} qx \dots \operatorname{sh} rx = \begin{cases} \operatorname{ch} \psi(p, q, \dots, r)x & (\varrho \text{ even}), \\ \operatorname{sh} \psi(p, q, \dots, r)x & (\varrho \text{ odd}), \end{cases} \tag{6}$$

This function vanishes identically when n, ϱ are of opposite parities, also when $n < \varrho$. In the same way as above this function gives the second system of ordinary symmetric functions of Kronecker.

As further specializations used later we have

$$\operatorname{ch}^n ax = \operatorname{ch} \varphi(n \cdot a)x;$$
$$\operatorname{sh}^m ax = \operatorname{ch} \psi(m \cdot a)x \quad \text{or} \quad \operatorname{sh} \psi(m \cdot a)x$$

according as m is even or odd.

§ 7. The functions φ, ψ can be calculated successively by two independent methods. Write for a moment

$$\varphi_n(a, b, \dots, c, p, q, \dots, r) = \varphi_n''',$$
$$\varphi_n(a, b, \dots, c) = \varphi_n', \quad \varphi_n(p, q, \dots, r) = \varphi_n'',$$

and multiply each member of (4) by the corresponding member of

$$\operatorname{ch} px \operatorname{ch} qx \dots \operatorname{ch} rx = \operatorname{ch} \varphi' x.$$

It follows from (4) that the result can be written

$$\operatorname{ch} \varphi''' x = \operatorname{ch} \varphi' x \operatorname{ch} \varphi'' x = \operatorname{ch} \varphi(\varphi', \varphi'')x.$$

Equating in this coefficients of a^{2n} we find

$$\varphi_{2n}''' = \varphi_{2n}(\varphi', \varphi'') = \frac{1}{2}\left[(\varphi' + \varphi'')^{2n} + (\varphi' - \varphi'')^{2n}\right],$$

which gives upon expansion

$$\varphi_{2n}(a, b, \dots, c, p, q, \dots, r) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} \varphi_{2n-2j}(a, b, \dots, c)\varphi_{2j}(p, q, \dots, r). \tag{7}$$

This expresses the φ function of $\varkappa + \varrho$ umbrae in terms of the φ functions

of $\varkappa$ and ϱ umbrae respectively. Taking $\varphi_{2j}(p) = p_{2j}$ we get from (7), or independently in the same way

$$(8) \qquad \varphi_{2n}(a, b, \ldots, c, p) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} p_{2j} \varphi_{2n-2j}(a, b, \ldots, c);$$

which, for $\varkappa = 1$, gives the φ functions of 2 umbrae, and from these the φ functions of 3 umbrae, and so on. We have also

$$(9) \qquad \varphi_{2n}((\varkappa+1)\cdot a) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} a_{2j} \varphi_{2n-2j}(\varkappa\cdot a).$$

In the same way from (6) we get

$$(10) \qquad \psi_{2n}(a, b, \ldots, c,\ p, q, \ldots, r) \text{ if } \varkappa, \varrho \text{ both even,}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} \psi_{2n-2j}(a, b, \ldots, c)\, \psi_{2j}(p, q, \ldots, r);$$

$$(11) \qquad \psi_{2n+1}(a, b, \ldots, p, q, \ldots, r) \text{ if } \varkappa \text{ even, } \varrho \text{ odd,}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1} \psi_{2n-2j}(a, b, \ldots, c)\, \psi_{2j+1}(p, q, \ldots, r);$$

$$(12) \qquad \psi_{2n}(a, b, \ldots, c,\ p, q, \ldots, r) \text{ if } \varkappa, \varrho \text{ both odd,}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j+1} \psi_{2n-2j-1}(a, b, \ldots, c)\, \psi_{2j+1}(p, q, \ldots, r).$$

Hence we find for the successive calculation of the ψ functions

$$(13) \qquad \psi_{2n+1}(a, b, \ldots, c, p) \text{ if } \varkappa \text{ is even,}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1} p_{2j+1} \psi_{2n-2j}(a, b, \ldots, c);$$

$$(14) \qquad \psi_{2n}(a, b, \ldots, c, p) \text{ if } \varkappa \text{ is odd,}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{2j+1} p_{2j+1} \psi_{2n-2j-1}(a, b, \ldots, c).$$

From these, if $\varkappa$ is even,

$$(15) \qquad \psi_{2n+1}((\varkappa+1)\cdot a) = \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} \psi_{2n-2j}(\varkappa\cdot a);$$

while if $\varkappa$ is odd,

$$(16) \qquad \psi_{2n}((\varkappa+1)\cdot a) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{2j+1} a_{2j+1} \psi_{2n-2j-1}(\varkappa\cdot a).$$

All of the above formulas are special cases of the more general but less useful addition theorems for the χ function, which may be found in the same way.

§ 8. The function $\varphi_n(a, b, \ldots, c)$ of the $\varkappa$ umbrae $a, b, \ldots, c$ is homogeneous of degree $\varkappa$ when written out fully (after the degradation of exponents); it also is then isobaric of weight n. Similarly for $\psi_n(a, b, \ldots, c)$. The foregoing method of calculation expresses the φ, ψ functions of given weight and degree in terms of like functions of lower weights and of constant degree less than that of the original functions. In the second method, to be explained next, the functions of given degree are expressed in terms of functions of the same degree and lower weights.

When the weight is n it is convenient to say that the corresponding function is of rank n.

§ 9. Write $\tau = 2^{\varkappa-1}$, $f_n = f_n(a, b, \ldots, c)$ and define this function by

$$f_n = \sum (a \pm b \pm \ldots \pm c)^{2n} \equiv \tau \varphi_{2n}(a, b, \ldots, c). \tag{17}$$

Denote by σ_j $(j \gtreqless \tau)$ the sum of the products taken j at a time of the τ umbral squares $(a \pm b \pm \ldots \pm c)^2$, all multiplications in forming σ_j being umbral until the last step when exponents are degraded. Thus for two letters $\varkappa = 2$, $\tau = 2$; $\sigma_1 = 2(a_2 b_0 + a_0 b_2)$, $\sigma_2 = a_4 b_0 - 2 a_2 b_2 + a_0 b_4$.

As in the theory of the ordinary linear difference equation with constant coefficients it follows that f_n $(n = \tau, \tau + 1, \ldots)$ are given successively by the umbral recurrence

$$f_{n+\tau} = \sigma_1 \cdot f_{n+\tau-1} - \sigma_2 \cdot f_{n+\tau-2} + \ldots + (-1)^{\tau-1} \sigma_\tau \cdot f_n, \tag{18}$$

in which the dot multiplication is as defined in § 2, and the τ initial values f_j $(j = 0, 1, \ldots, \tau - 1)$ are found by direct calculation. Clearly all letters with zero suffix in the σ_j may be suppressed. Thus for two letters,

$$f_{n+2} = 2(a_2 + b_2) \cdot f_{n+1} - (a_4 - 2 a_2 b_2 + b_4) \cdot f_n, \tag{19}$$

the initial values being

$$f_0 = 2 a_0 b_0, \quad f_1 = 2(a_2 b_0 + a_0 b_2);$$

and hence putting $n = 0$ in (19) we get

$$\begin{aligned} f_2 &= 2(a_2 + b_2) \cdot 2(a_2 b_0 + a_0 b_2) - (a_4 - 2 a_2 b_2 + b_4) \cdot 2 a_0 b_0 \\ &= 2(a_4 b_0 + 6 a_2 b_2 + a_0 b_4); \end{aligned}$$

whence (19) with $n = 1$ gives

$$\begin{aligned} f_3 &= 2(a_2 + b_2) \cdot 2(a_4 b_0 + 6 a_2 b_2 + a_0 b_4) - (a_4 - 2 a_2 b_2 + b_4) \cdot 2(a_2 b_0 + a_0 b_2) \\ &= 2(a_6 b_0 + 15 a_4 b_2 + 15 a_2 b_4 + a_0 b_6). \end{aligned}$$

These, which can be checked directly, sufficiently illustrate the process. Having found f_n from (18) we get φ_{2n} from (17).

In such recurrences two or more umbrae can not be replaced by the same letter.

For the like calculation of the ψ functions we distinguish two cases.

a) $\varkappa$ *is even.* Put $g_n \equiv g_n(a, b, \ldots, c)$;

$$g_n = \sum \pm (a \pm b \pm \ldots \pm c)^{2n} \equiv \tau\psi_{2n}(a, b, \ldots, c).$$

The values of $g_0, g_1, \ldots, g_{\tau-1}$ are computed directly as before; those of g_n $(n > \tau - 1)$ are then given by (18) with g in place of f.

b) $\varkappa$ *is odd.* Form the products ϱ_j $(j \leqq \varkappa)$ of the linear umbral expressions $(a \pm b \pm \ldots \pm c)$ taken j at a time; define $h_n \equiv h_n(a, b, \ldots, c)$ by

$$h_n = \sum \pm (a \pm b \pm \ldots \pm c)^{2n+1} \equiv \tau\psi_{2n+1}(a, b, \ldots, c),$$

and calculate $h_0, h_1, \ldots, h_{\tau-1}$ directly. Then

$$h_{n+\tau} = \varrho_1 \cdot h_{n+\tau-1} - \varrho_2 \cdot h_{n+\tau-2} + \ldots + (-1)^{\tau-1}\varrho_\tau \cdot h. \tag{20}$$

All of the foregoing formulas are special cases of the less useful umbral recurrences for the χ functions. These can be found in the same way.

II. The Extended Numbers.

§ 10. We pass now to the extensions of the numbers of Bernoulli, Genocchi, Euler, and Lucas mentioned in the introduction. The manner in which the rational functions defined next degenerate to the numbers is considered in § 11. Write

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_{2n} = \frac{a_{2n}}{a_0} \qquad (n > 0).$$

Then from the definition of $\operatorname{hc} ax$ as the reciprocal of $\operatorname{ch} ax$ we have

$$a_0 \operatorname{hc} ax = (1 + \operatorname{ch} \alpha x)^{-1} = 1 - \operatorname{ch} \alpha x + \operatorname{ch}^2 \alpha x - \ldots;$$

and hence if $E_n(a)$ be defined by

$$E_0(a) = \frac{1}{a_0}, \qquad E_{2n-1}(a) = 0, \qquad E_{2n}(a) = \frac{1}{a_0}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \varphi_{2n}(j \cdot \alpha)$$

for $n \neq 0$, it is evident since $\alpha_0 = 0$ that the coefficient of $x^{2n}/(2n)!$ in $\operatorname{ch}^j \alpha x$ is zero when $j > n$, and

$$\operatorname{hc} ax = \operatorname{ch} E(a)x. \tag{21}$$

This is the fundamental generating identity for the *extended Eulerian numbers* $E_n(a)$. It expresses symbolically the result of taking the formal reciprocal of any even series. The explicit form given above for $E_n(a)$

sufficiently indicates the structure of this function. It may be more conveniently calculated, however, by other means noted in § 14. Like remarks apply to the extended numbers next defined.

Proceeding similarly with the reciprocal of any odd series we write

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)\,a_1} \qquad (n > 0);$$

$$a_1 x \operatorname{hs} ax = (1 + \operatorname{ch} \beta x)^{-1} = 1 - \operatorname{ch} \beta x + \operatorname{ch}^2 \beta x - \ldots .$$

For a reason appearing in § 11 we multiply the last throughout by $\frac{1}{2}$, and then define the *extended Lucasian numbers* $R_n(a)$ by $R_0(a) = \frac{1}{2a_1}$, $R_{2n-1}(a) = 0$, $R_{2n}(a) = \frac{1}{2a_1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j q_{2n}(j \cdot \beta)$, valid for $n > 0$. Hence we obtain the fundamental identity

$$\frac{x}{2} \operatorname{hs} ax = \operatorname{ch} R(a)\, x. \tag{22}$$

The procedure with the *extended Bernoullian numbers* $B_n(a)$ is somewhat different. We saw in § 4 that $\operatorname{ht} ax$ expresses the division of any even series by any odd series. By a suitable change in notation the same division can also be written $\operatorname{ht} a \frac{x}{2}$. We now define the $B(a)$ of even rank by

$$\frac{x}{2} \operatorname{ht} a \frac{x}{2} = \operatorname{ch} B(a)\, x, \tag{23}$$

and arbitrarily assign to the $B_n(a)$ of odd rank the values

$$B_1(a) = -\frac{1}{2}, \quad B_{2n+1}(a) = 0 \qquad (n > 0). \tag{24}$$

The conventional value $-\frac{1}{2}$ of $B_1(a)$ is not a necessity; it merely enhances later the close algebraic correspondence between the extended and the ordinary Bernoullian numbers. The like applies to the conventional value of $G_1(a)$.

Similarly the division of any odd series by any even series can be written $\operatorname{th} a \frac{x}{2}$, and we define the *extended Genocchian numbers* $G_n(a)$ of even rank by

$$x \operatorname{th} a \frac{x}{2} = \operatorname{ch} G(a)\, x, \tag{25}$$

those of odd rank by

$$G_1(a) = -1, \quad G_{2n+1}(a) = 0 \qquad (n > 0). \tag{26}$$

§ 11. Let $E_n(y)$, $R_n(y)$, $B_n(y)$, $G_n(y)$ denote the results of replacing each of $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in $E_n(a)$, $R_n(a)$, $B_n(a)$, $G_n(a)$ respectively by the ordinary y. Then from (21), (22), (23), (25) we have

$$\operatorname{hc} x = \operatorname{ch} E(1)\,x, \qquad \frac{x}{2}\operatorname{hs} x = \operatorname{ch} R(1)\,x,$$

$$\frac{x}{2}\operatorname{ht}\frac{x}{2} = \operatorname{ch} B(1)\,x, \qquad x\operatorname{th}\frac{x}{2} = \operatorname{ch} G(1)\,x,$$

in which the hyperbolic functions on the left are ordinary. Comparing these and (24), (26) with the symbolic generators for the ordinary numbers E_n, R_n, B_n, G_n of Euler, Lucas, Bernoulli and Genocchi[5]), we see that

$$E_n(1) = E_n, \qquad R_n(1) = R_n, \qquad B_n(1) = B_n, \qquad G_n(1) = -G_n.$$

§ 12. Lucas in several papers gave definitions and properties of ordinary numbers B, R, G, E of *higher order*[6]).

We proceed to extend these. For unit values of all the umbral arguments in the extensions these *extended numbers of higher order* degenerate as in § 11 to the higher order numbers defined by Lucas. Incidentally the higher order extensions afford some remarkable algebraic identities between the extensions so far considered.

The *argument* (umbral) of $E_n(a)$ is a, and similarly for the other functions. Multiply together, member by member, the generating identities of the type (21) for the extended E numbers of the arguments $a, b, \ldots, c$, after writing the left hand members in the respective forms $1/\operatorname{ch} ax, \ldots, 1/\operatorname{ch} cx$. The denominator on the left is $\operatorname{ch}\varphi(a, b, \ldots, c)\,x$, and hence we have

$$\operatorname{hc}\varphi(a, b, \ldots, c)\,x = \operatorname{hc}\varphi(E(a), E(b), \ldots, E(c))\,x; \tag{27}$$

whence, on equating coefficients,

$$E_n(\varphi(a, b, \ldots, c)) = \varphi_n(E(a), E(b), \ldots, E(c)). \tag{28}$$

There are $\varkappa$ umbrae in the set $a, b, \ldots, c$. We shall call either of the equal functions (28) *the extended E number of rank n and order* $\varkappa$ *for the arguments* $a, b, \ldots, c$, and we shall denote it by $E_n(a, b, \ldots, c)$. Obviously this is a symmetric function of $a, b, \ldots, c$. The generating identity is

$$\operatorname{hc} ax \operatorname{hc} bx \ldots \operatorname{hc} cx = \operatorname{ch} E(a, b, \ldots, c)\,x. \tag{29}$$

The *extended R numbers of order* $\varkappa$ are defined in a similar manner through

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\varkappa} \operatorname{hs} ax \operatorname{hs} bx \ldots \operatorname{hs} cx = \operatorname{ch} R(a, b, \ldots, c)\,x. \tag{30}$$

[5]) Cf. Lucas, Théorie des Nombres, loc. cit. [6]).

[6]) American Journal of Mathematics **1**, p. 321; Bulletin de la Société mathématique de France **1**, **2**, **6**, **7**, **8**; Théorie des Nombres, p. 262.

Hence, as above, on referring to (6), we have two cases according as $\varkappa$ is even or odd:

$$R_{2n-\varkappa}(a, b, \ldots, c) \text{ if } \varkappa \text{ is even, } 2n \geqq \varkappa, \tag{31}$$

$$= E_{2n-\varkappa}(\psi(a, b, \ldots, c)) = \frac{(2n-\varkappa)!}{(2n)!} 2^{\varkappa} \varphi_{2n}(R(a), \ldots, R(c));$$

$$R_{2n-\varkappa+1}(a, b, \ldots, c) \text{ if } \varkappa \text{ is odd, } 2n \geqq \varkappa - 1, \tag{32}$$

$$= R_{2n-\varkappa+1}(\psi(a, b, \ldots, c)) - \frac{(2n-\varkappa-1)!\, 2^{\varkappa-1}}{(2n)!} \varphi_{2n}(R(a), \ldots, R(c)).$$

The *extended B numbers of order* $\varkappa$ are defined by

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\varkappa} \operatorname{ht} a \frac{x}{2} \operatorname{ht} b \frac{x}{2} \ldots \operatorname{ht} c \frac{x}{2} = \operatorname{ch} B(a, b, \ldots, c)\, x. \tag{33}$$

Noticing that $\operatorname{ht} x = \operatorname{hs} x \operatorname{ch} x$, and replacing x by $2x$ in (33) we find

$$\begin{aligned} 2^{2n-\varkappa} B_{2n}(a, b, \ldots, c) &= 2^{2n-\varkappa} \varphi_{2n}(2B(a), \ldots, 2B(c)), \\ &= \varphi_{2n}(a, b, \ldots, c, R(a), R(b), \ldots, R(c)), \\ &= \varphi_{2n}(\varphi(a, b, \ldots, c), R(a, b, \ldots, c)). \end{aligned} \tag{34}$$

The *extended G numbers of order* $\varkappa$ are given by

$$(2x)^{\varkappa} \operatorname{th} ax \operatorname{th} bx \ldots \operatorname{th} cx = \operatorname{ch} G(a, b, \ldots, c)\, x; \tag{35}$$

and hence if $\varkappa$ is even, $2n \geqq \varkappa$,

$$\begin{aligned} G_{2n}(a, b, \ldots, c) &= \varphi_{2n}(G(a), G(b), \ldots, G(c)) \\ &= \frac{(2n)!\, 2^{\varkappa}}{(2n-\varkappa)!} \varphi_{2n-\varkappa}(E(a, b, \ldots, c), \psi(a, b, \ldots, c)); \end{aligned} \tag{36}$$

while if $\varkappa$ is odd the last expression is to be replaced by

$$\frac{(2n)!\, 2^{\varkappa}}{(2n-\varkappa+1)!} \chi_{2n-\varkappa+1}(E(a, b, \ldots, c); \psi(a, b, \ldots, c)).$$

§ 13. The computation of the extended numbers of order $\varkappa + \varrho$ can be referred to that of the extended numbers of orders $\varkappa$ and ϱ. Write for a moment $E_n(a, b, \ldots, c) = E_n'$, $E_n(p, q, \ldots, r) = E_n''$. Then we have the generating identities

$$\operatorname{hc} ax \operatorname{hc} bx \ldots \operatorname{hc} cx = \operatorname{ch} E' x,$$
$$\operatorname{hc} px \operatorname{hc} qx \ldots \operatorname{hc} rx = \operatorname{ch} E'' x;$$

whence, multiplying together corresponding members and equating coefficients we obtain

$$E_{2n}(a, b, \ldots, c, p, q, \ldots, r) = \varphi_{2n}(E(a, b, \ldots, c), E(p, q, \ldots, r)). \tag{37}$$

In the same way we find precisely similar formulas with R, B, G in place of E. Numerous further relations are suggested at once by the most

immediate manipulations of the generating identities (29), (30), (33), (35). For example, $\operatorname{hc} ax \times \operatorname{ch} ax = 1$, hence

$$\varphi_{2n}(E(a, b, \ldots, c), \varphi(a, b, \ldots, c)) = 0 \text{ or } 1$$

according as $n > 0$ or $n = 0$. This relation may be used to express $E_{2n}(a, b, \ldots, c)$ as a determinant of functions $\varphi_{2j}(a, b, \ldots, c)$ $(j = 0, 1, \ldots)$. The analogous developments for the other extended functions are obtained in the same way. We pass on to a brief discussion of the functional relations between the extended functions of order unity. A corresponding analysis gives the results of this same general kind when the order exceeds unity.

§ 14. Multiply (21) throughout by $\operatorname{ch} ax$ and equate coefficients in the result:

$$\varphi_0(E(a), a) = 1, \qquad \varphi_{2n}(E(a), a) = 0 \qquad (n > 0).$$

From these it follows at once that

$$[x + E(a) + a]^n + [x + E(a) - a]^n = 2x^n. \tag{38}$$

Now let $f(x)$ denote an arbitrary analytic function, and let its power series expansion be

$$f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots .$$

The case in which $k_n = 0$ for $n > m$ (constant) is included. Multiply (38) throughout by k_n, and in the result put $n = 0, 1, 2, \ldots$. Add all the equalities thus obtained:

$$f(x + E(a) + a) + f(x + E(a) - a) = 2f(x). \tag{39}$$

For special choices of the function f this furnishes numerous formulas for the rapid successive computation of the $E_n(a)$. We need not illustrate these processes which are parallel to those for the well known special case[7]) obtained by putting $a_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$f(x + E(1) + 1) + f(x + E(1) - 1) = 2f(x).$$

Proceeding similarly with (22) we get

$$x = 2 \operatorname{ch} R(a)\, x \operatorname{sh} ax = 2 \operatorname{sh} \chi(R(a); a)\, x;$$

whence, equating coefficients,

$$2\chi_1(R(a); a) = 1, \qquad 2\chi_{2n+1}(R(a); a) = 0 \qquad (n > 0),$$

from which it follows easily that

$$[x + R(a) + a]^n - [x + R(a) - a]^n = nx^{n-1}. \tag{40}$$

[7]) Lucas, Théorie des Nombres, Chapter XIV.

Generalizing as before we have

$$f(x+R(a)+a)-f(x+R(a)-a)=f'(x), \tag{41}$$

where $f'(x)$ is the derivative with respect to x of $f(x)$. The degenerate case is again due to Lucas.

From (23), (24) we find in the same way

$$f(x+2B(a)+a)-f(x+2B(a)-a)=2f'(x-a); \tag{42}$$

and from (25), (26),

$$f(x+2G(a)+a)+f(x+2G(a)-a)=-4f'(x+a). \tag{43}$$

In these f' denotes the derivative with respect to x. Similar methods can be applied to provide a profusion of general relations between two or more of $B(a)$, $G(a)$, $E(a)$, $R(a)$.

III. The Extended Functions.

§ 15. For many reasons it appears that the most convenient forms of the ordinary Bernoullian and Eulerian functions

$$\beta_n(y),\ \gamma_n(y),\ \eta_n(y),\ \varrho_n(y) \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

are those given by the symbolic equations of definition

$$\operatorname{sh}\beta(y)x=2x\operatorname{ht}x\operatorname{sh}yx, \qquad \operatorname{ch}\beta(y)x=2x\operatorname{ht}x\operatorname{ch}yx,$$
$$\operatorname{sh}\gamma(y)x=4x\operatorname{th}x\operatorname{sh}yx, \qquad \operatorname{ch}\gamma(y)x=4x\operatorname{th}x\operatorname{ch}yx,$$

for the Bernoullian functions, and for the Eulerian,

$$\operatorname{sh}\eta(y)x=2\operatorname{hc}x\operatorname{sh}yx, \qquad \operatorname{ch}\eta(y)x=2\operatorname{hc}x\operatorname{ch}yx,$$
$$\operatorname{sh}\varrho(y)x=x\operatorname{hs}x\operatorname{sh}yx, \qquad \operatorname{ch}\varrho(y)x=x\operatorname{hs}x\operatorname{ch}yx,$$

in all of which, since x, y are ordinaries, the hyperbolic functions on the right are ordinary. The corresponding set of definitions in which hyperbolic functions are replaced by circular may also be taken. It can be shown easily that the functions so defined are simply expressible in terms of any of the Bernoullian and Eulerian functions discussed by other writers. The above definitions in conjunction with the simplest properties of the umbral symmetric functions have the advantage of giving uniformly all the general relations between the functions by means of the most elementary manipulations. As these functions have been fully considered from this point of view in another paper we shall limit the following discussion to an algebraic extension of the functions β, γ, η, ϱ. When in the extensions the umbra b is replaced by the ordinary y, and $a_n=1$ $(n=0,1,2,\ldots)$, the extended functions degenerate to those above defined. The relations between the extended functions include those be-

tween the ordinary functions, the latter being obtained from the former by putting $b = y$, $a = 1$ in the formulas.

§ 16. To simplify the writing put

$$\lambda_n(b, a) \equiv \lambda_n \quad (\lambda = \beta, \gamma, \eta, \varrho); \qquad A_n(a) \equiv A_n \quad (A = B, G, E, R),$$

so that λ_n is a function of the umbrae a, b, and A_n is an extended number of Bernoulli, Genocchi, Euler or Lucas. The equations of definition are

$$\text{(44)} \qquad \operatorname{sh}\beta x = 2x \operatorname{ht} ax \operatorname{sh} bx, \qquad \operatorname{ch}\beta x = 2x \operatorname{ht} ax \operatorname{ch} bx;$$

$$\text{(45)} \qquad \operatorname{sh}\gamma x = 4x \operatorname{th} ax \operatorname{sh} bx, \qquad \operatorname{ch}\gamma x = 4x \operatorname{th} ax \operatorname{ch} bx;$$

$$\text{(46)} \qquad \operatorname{sh}\eta x = 2\operatorname{hc} ax \operatorname{sh} bx, \qquad \operatorname{ch}\eta x = 2\operatorname{hc} ax \operatorname{ch} bx;$$

$$\text{(47)} \qquad \operatorname{sh}\varrho x = x \operatorname{hs} ax \operatorname{sh} bx, \qquad \operatorname{ch}\varrho x = x \operatorname{hs} ax \operatorname{ch} bx.$$

In these replace the umbral hyperbolic functions of bx by their equivalents as umbral hyperbolic cosines of extended B, G, E, R numbers and equate coefficients of like powers of x:

$$\text{(48)} \qquad \beta_n(b, a) = [b + 2B(a)]^n + [b - 2B(a)]^n,$$

$$\text{(49)} \qquad \gamma_n(b, a) = [b + 2G(a)]^n + [b - 2G(a)]^n,$$

which we shall call the *extended Bernoullian functions of rank* n $(\geqq 0)$ *for the argument* b *and the parameter* a (both a, b being umbral);

$$\text{(50)} \qquad \eta_n(b, a) = [b + E(a)]^n + [b - E(a)]^n,$$

$$\text{(51)} \qquad \varrho_n(b, a) = [b + R(a)]^n + [b - R(a)]^n,$$

the similarly defined *extended Eulerian functions*. Hence for $(\lambda, L) = (\beta, B)$ or (γ, G) we have

$$\text{(52)} \qquad \lambda_n(b, a) = 2\sum_{j=0} 2^{2j} \binom{n}{2j} b_{n-2j} L_{2j}(a);$$

and for $(\mu, M) = (\eta, E)$ or (ϱ, R),

$$\text{(53)} \qquad \mu_n(b, a) = 2\sum_{j=0} \binom{n}{2j} b_{n-2j} M_{2j}(a).$$

In the special case when b is the ordinary y, $b_{n-2j} = y^{n-2j}$. The relations connecting the functions are obtained at once from the equations of definition by means precisely similar to those already used for the extended numbers. The algebraic details follow exactly those for the special case $(b, a) = (y, 1)$, and can be obtained from the latter by a few obvious changes in notation. The special case having been considered in the paper mentioned above, it will suffice here to give only four of the more important relations.

§ 17. Multiply the equations (44) throughout by $2x \operatorname{th} ax$ and equate coefficients of x $(n \geqq 0)$:

$$(\beta + 2G)^n + (\beta - 2G)^n = -8n(n-1)b^{n-2},$$

the power b^{n-2} being umbral, as always, and equal to b_{n-2}. From this we have

$$(x + \beta + 2G)^n + (x + \beta - 2G)^n = -8\frac{d^2}{dx^2}(x+b)^n,$$

and therefore, generalizing to functions f we get

$$f(x + \beta + 2G) + f(x + \beta - 2G) = -8f''(x+b). \tag{54}$$

Similarly, after multiplying (45) throughout by $x \operatorname{ht} ax$, we find

$$(\gamma + 2B)^n + (\gamma - 2B)^n = -8n(n-1)b^{n-2},$$

$$f(x + \gamma + 2B) + f(x + \gamma - 2B) = -8f''(x+b); \tag{55}$$

and from (46) after multiplication by $\operatorname{ch} ax$,

$$(\eta + a)^n + (\eta - a)^n = 4b^n,$$

$$f(x + \eta + a) + f(x + \eta - a) = 4f(x+b); \tag{56}$$

and from (47) after multiplying by $\operatorname{sh} ax$,

$$(\varrho + a)^n - (\varrho - a)^n \quad 2n(-b)^{n-1},$$

$$f(x + \varrho + a) - f(x + \varrho - a) = 2f'(x-b). \tag{57}$$

(Eingegangen am 23. November 1922.)

Über Kurvennetze mit isolierten Singularitäten auf geschlossenen Flächen.

Von

Hans Hamburger in Berlin.

Teil I.[1])

1. Auf einer geschlossenen zweiseitigen[2]) und im Sinne der Analysis Situs singularitätenfreien Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlechte p denke man sich in folgender Weise ein Kurvennetz definiert:

Ist P_0 ein Punkt der Fläche, der von gewissen Punkten $S_1, S_2, \ldots$ — den singulären Punkten des Netzes — verschieden ist und sind u, v beliebige krummlinige Koordinaten eines Punktes von $\mathfrak{F}$, so sei dem Punkte P_0 ein Paar stetiger Funktionen $u(x, y \mid P_0)$, $v(x, y \mid P_0)$ zugeordnet, die einen kleinen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{X}_0$ der xy-Ebene auf eine Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von P_0 stetig und umkehrbar eindeutig abbilden. Die Stücke der Netzlinien, die in $\mathfrak{U}_0$ gelegen sind, seien nunmehr als Bilder der achsenparallelen Geradenstücke aus $\mathfrak{X}_0$ definiert. Der Punkt P_0 soll ein regulärer Punkt des Netzes heißen.

Ist P_1 ein zweiter von P_0 verschiedener regulärer Punkt des Netzes, so ist ihm ein neues Funktionenpaar $u(x, y \mid P_1)$, $v(x, y \mid P_1)$ zugeordnet, das einen Bereich $\mathfrak{X}_1$ der xy-Ebene auf eine Umgebung $\mathfrak{U}_1$ von P_1 stetig

[1]) Die vorliegende Note wurde zwar in etwas anderer Gestalt, aber mit den gleichen Ergebnissen im April 1922 dem Vorstand des Hamburgischen Seminars zur Veröffentlichung übergeben. Inzwischen machte mich Herr v. Kerékjártó (Göttingen) freundlichst darauf aufmerksam, daß sich meine damalige Formulierung des Beweises der Hauptformel vereinfachen ließ. Ich habe daher mein ursprüngliches Manuskript noch einmal umgearbeitet, wobei die Bemerkungen von Kerékjártó (besonders im § 1 Abschnitt **16**) sorgfältigst berücksichtigt wurden.

[2]) Um die Darstellung übersichtlicher zu gestalten, sind hier einseitige Flächen und Flächen mit Randkurven nicht berücksichtigt worden. Doch lassen sich die hier auseinandergesetzten Methoden ohne Unterschied bei einseitigen und zweiseitigen, geschlossenen und berandeten Flächen anwenden.

und umkehrbar eindeutig abbildet. Überdecken sich $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1$ teilweise, so werde vorausgesetzt, daß die durch die beiden Funktionenpaare $u(x, y \mid P_0)$, $v(x, y \mid P_0)$ einerseits und $u(x, y \mid P_1)$, $v(x, y \mid P_1)$ andererseits in dem $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1$ gemeinsamen Bereiche definierten Netzlinienstücke beidemal die gleichen sind[3]).

2. In der Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von P_0 existieren ferner Bildbereiche $\mathfrak{B}$ von achsenparallelen Rechtecken der xy-Ebene, die ganz im Innern von $\mathfrak{U}_0$ gelegen sind. Diese Bereiche $\mathfrak{B}$ werden reguläre Netzvierecke genannt, *mithin liegt jeder reguläre Punkt des Netzes im Innern eines passend konstruierten regulären Netzvierecks und umgekehrt soll jeder Punkt des Netzes regulär heißen, der sich durch ein reguläres Netzviereck überdecken läßt. Jeden Punkt von $\mathfrak{F}$, der dieser Bedingung nicht genügt, hat man als singulären Punkt des Netzes anzusehen.*

Im folgenden ist die Bezeichnung eines Punktes P von $\mathfrak{F}$ als regulär bzw. singulär ein für allemal auf das Verhalten des Kurvennetzes in der Umgebung von P bezogen und nicht auf eine Eigenschaft der Fläche $\mathfrak{F}$ im Punkt P, die im Verlauf der ganzen Untersuchung immer als singularitätenfrei im Sinne der Analysis Situs vorausgesetzt ist.

3. Das Hauptziel des ersten Teiles der Untersuchungen, die sich in den folgenden Seiten finden, ist eine vorläufige Klassifizierung der Singularitäten, die man erhält, wenn man nach einem einfachen Verfahren jeder singulären Stelle einen ganzzahligen Index r $(-\infty < r < \infty)$ zuordnet. Es läßt sich nämlich jede singuläre Stelle S durch eine geschlossene Jordankurve $\mathfrak{p}$ mit den beiden Eigenschaften umgeben; *erstens*: $\mathfrak{p}$ begrenzt einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{F}$, der außer S nur aus regulären Punkten des Netzes besteht; *zweitens*: $\mathfrak{p}$ setzt sich in seiner Gesamtheit aus endlich vielen Stücken von Netzlinien zusammen.

[3]) Wie mir Herr v. Kerékjártó freundlichst brieflich mitteilte, hat er bewiesen, daß sich die Bedingungen, unter denen ein Netz regulär im Sinne des Textes ist, noch etwas allgemeiner formulieren ließen:

Um jeden Punkt P von $\mathfrak{F}$, der von den Punkten $S_1, S_2, \ldots$ verschieden ist, denke man sich einen Kreis $\mathfrak{k}$ mit dem festen von P unabhängigen Radius δ beschrieben, unter δ eine passend gewählte positive Zahl verstanden. Dann hat das Netz die Regularitätseigenschaften des Textes, wenn die Kurvenbogen im Innern eines jeden einzelnen Kreises $\mathfrak{k}$ in zwei Scharen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zerfallen, derart, daß

1. *von jedem inneren Punkte P von $\mathfrak{k}$ zwei Netzbogen der Schar $\mathfrak{A}$ und zwei Netzbogen der Schar $\mathfrak{B}$ ausgehen und die beiden Bogen der einen Schar die Bogen der andern Schar trennen,*

2. *daß jede Kurve des Netzes, die innere Punkte von $\mathfrak{k}$ enthält, den Rand von $\mathfrak{k}$ in mindestens zwei Punkten schneidet.*

Umgekehrt läßt sich mit Hilfe des Satzes von Heine-Borel leicht einsehen, daß jedes im Sinne des Textes reguläre Netz den Kerékjártóschen Bedingungen genügt.

Die Punkte von $\mathfrak{p}$, in denen Stücke verschiedener Netzlinien zusammenstoßen, nenne man Ecken und unterscheide einspringende von ausspringenden Ecken, je nachdem die Fortsetzungen der beiden in der Ecke zusammenstoßenden Netzlinienstücke über die Ecke hinaus sich beide gleichzeitig ins Innere hinein fortsetzen lassen oder nicht. Bezeichnet nunmehr a die Anzahl der ausspringenden, e die Anzahl der einspringenden Ecken und wird $r = a - e$ gesetzt, so zeigt sich, obgleich sich eine Jordankurve mit den geforderten Eigenschaften in unendlich mannigfacher Weise konstruieren läßt, daß alle diese $\mathfrak{p}$ auf dieselbe Zahl r führen. Mithin ist r eine für die Singularität S invariante charakteristische Zahl, die nunmehr S als Index zugeordnet werde.

4. Setzt man voraus, daß alle Punkte von $\mathfrak{F}$ reguläre Punkte des Netzes sind bis auf k Punkte $S_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) und ist $r_\varkappa$ der $S_\varkappa$ zugeordnete Index, so besteht zwischen den $r_\varkappa$ und dem Geschlechte p von $\mathfrak{F}$ die fundamentale Beziehung

$$(*) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k}\left(1 - \frac{r_\varkappa}{4}\right) = 2 - 2p. \quad [4])$$

Diese Formel wird in § 1 bewiesen.

In § 2 wird gezeigt, daß man die Zahl $r_\varkappa$ nicht nur jeder isolierten Singularität, sondern auch jedem einfach zusammenhängenden Bereiche $\mathfrak{B}_\varkappa$ auf $\mathfrak{F}$, dessen Rand nur aus regulären Netzpunkten besteht, als Index zuordnen kann. Gehört jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ mindestens einem von k Teilbereichen $\mathfrak{B}_\varkappa$ an und haben zwei Teilbereiche $\mathfrak{B}_\varkappa$ und $\mathfrak{B}_i$ außer den Randpunkten keine gemeinsamen Punkte, so gilt wieder die Fundamentalformel (*) und zwar auch dann noch, wenn man die Voraussetzung, daß auf $\mathfrak{F}$ nur isolierte singuläre Stellen gelegen sind, fallen läßt, wenn mithin einer oder mehrere der Teilbereiche $\mathfrak{B}_\varkappa$ unendlich viele Singularitäten enthalten, wofern nur unter $r_\varkappa$ jetzt nicht mehr der Index einer Singularität, sondern der Index des Teilbereiches $\mathfrak{B}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) vorstanden wird.

Aus (*) werden am Schluß des Kapitels I in § 3 unter anderm ein Satz über die Anzahl der Nabelpunkte einer von einem System von Krümmungslinien überdeckten konvexen geschlossenen Fläche abgeleitet, wenn über das Verhalten der Krümmungslinien in der Umgebung der Nabelpunkte geeignete Voraussetzungen gemacht sind. Die an das System von Krümmungslinien sich anschließenden Fragestellungen sind der Ausgangspunkt dieser Untersuchung gewesen.

[4]) Der Zusammenhang von (*) mit entsprechenden, bereits bekannten Formeln aus der Theorie der einfachen Kurvenscharen wird in den Abschnitten **6** bis **10** der Einleitung (vgl. insbesondere die Fußnote [12]) auseinandergesetzt.

5. Das Kapitel II[5]) enthält eine eingehendere Untersuchung der isolierten singulären Stellen eines Kurvennetzes. Hierbei erweist es sich als zweckmäßig, einen singulären Punkt S, in dessen noch so kleiner Umgebung entweder eine spiralförmige Netzlinie[6]) oder aber eine geschlossene, S nicht enthaltende Netzlinie gelegen ist, gesondert von denjenigen Singularitäten zu betrachten, bei welchen dies nicht der Fall ist. Diese letzteren nennen wir Singularitäten erster Art, die anderen entsprechend Singularitäten zweiter Art. *Eine singuläre Stelle zweiter Art ist immer vom Index* 0; *umgekehrt kann aber eine Singularität vom Index* 0 *sowohl von erster als auch von zweiter Art sein.*

Einfache Sätze ergeben sich, wenn man solche singulären Stellen untersucht, in denen sich nur endlich viele Netzlinien treffen[7]). *Gehen nämlich von dem singulären Punkte S genau r Netzlinienstücke* ($r = 1, 2, \ldots$) *aus, so ist S vom Index r, mithin immer von erster Art und ist außerdem allen denjenigen singulären Stellen äquivalent, in welchen gleichfalls r Netzlinienstücke zusammenstoßen. Gehen von einem Punkte P genau vier Netzlinienstücke aus, so ist der Punkt P ein regulärer Punkt und die vier Netzlinienstücke werden zu zwei sich in P kreuzenden Netzlinien vereinigt.*

6. Auf einen bemerkenswerten Zusammenhang mit fundamentalen älteren Untersuchungen von Poincaré und Herrn Bendixson wird man geführt, wenn man das Kurvennetz in der Umgebung einer singulären Stelle in zwei einfache Scharen von Kurven zu zerlegen sucht, derart, daß zwei Kurven der gleichen Schar außer S keinen gemeinsamen Punkt haben. Dies erweist sich immer als möglich, wenn S von geradem Index ist. In diesem Falle wollen wir sagen, das Netz in der Umgebung von S setze sich aus zwei einfachen Kurvenscharen einer Schar A und einer Schar B zusammen. Ist S von ungeradem Index, so läßt sich das Kurvennetz in der Umgebung von S als eine einzige Kurvenschar in einem einfach zusammenhängenden Bereich einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche auffassen, die S zum Windungspunkt hat.

Topologische Eigenschaften von Kurvenscharen hat bereits Poincaré betrachtet[8]), der sich allerdings auf den Fall beschränkt, daß alle Kurven

[5]) Erscheint später.

[6]) Bei topologischen Untersuchungen heiße eine Netzlinie a in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ einer singulären Stelle spiralförmig, wenn mindestens eine zweite Netzlinie existiert, die in unendlich vielen Punkten der Umgebung $\mathfrak{U}$ von a geschnitten wird.

[7]) S ist immer als Endpunkt, nie als Durchgangspunkt einer Netzlinie anzusehen. Zu jedem beliebigen Index existieren allgemeine Typen von Singularitäten, bei denen unendlich viele Netzlinien von S ausgehen.

[8]) Poincaré, H.: Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. Die Abhandlung ist in 4 Teilen im J. de math. p. et appl. erschienen. Erster

der Schar einer einfachen Differentialgleichung erster Ordnung von spezieller Gestalt genügen. Dann fallen die singulären Stellen der Differentialgleichung zusammen mit den singulären Stellen der Kurvenschar und sind im übrigen von besonders einfachem Typus (vgl. Fußnote [12]).

Poincaré ordnet nun jeder singulären Stelle einen Index i zu[9]) und beweist für den Fall, daß die Kurvenscharen eine geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlechte p vollständig überdecken und dort nur endlich viele singuläre Stellen bilden, eine der Formel (*) entsprechende Beziehung zwischen Indexsumme und Geschlecht der Fläche (**3**, S. 203—208, vgl. auch Fußnote [12]).

7. Kurvenscharen von wesentlich allgemeinerer Gestalt hat Herr Bendixson[10]) untersucht; zwar genügen auch hier die Kurven der Schar einer Differentialgleichung 1. Ordnung, doch ist diese von weniger speziellem Charakter als in den Abhandlungen von Poincaré. Um jeder singulären Stelle S erster Art einen Index zuzuordnen, unterscheidet Herr Bendixson in der Umgebung von S *Schleifengebiete* (régions nodales fermées l. c. S. 19), *Strahlengebiete* (régions nodales ouvertes l. c. S. 25) und *Sattelgebiete* (cols l. c. S. 21—23) und definiert[11]): *Ein Punkt P der Umgebung von S liegt*

I. *in einem Schleifengebiete, wenn die Scharkurve durch P von S ausgeht und zu S zurückkehrt, ohne die Umgebung von S zu verlassen* (*Beisp. Die Punkte* A_1, A_2, A_3 *der Fig.* 1);

Teil (3), **7** (1881), S. 375—422, zweiter Teil (3), **8** (1882), S. 251—296, dritter Teil (4), **1** (1885), S. 167—244, vierter Teil (4), **2** (1886), S. 151—218. Die vier Teile werden im folgenden kurz mit **1**, **2**, **3**, **4** zitiert.

[9]) Das in **1**, S. 400—403 angegebene Verfahren hat analytischen Charakter und beruht wesentlich auf einer Vorzeichenbestimmung der Koeffizienten der Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Stelle. Eine zweite in **3**, S. 203—206 beschriebene Methode zur Bestimmung des Index der singulären Stelle benutzt mehr topologische Eigenschaften der Kurvenschar, ist aber kompliziert.

[10]) Bendixson, I.: Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. **24** (1901), S. 1—88.

[11]) Der Wortlaut unseres Textes liefert noch keine hinreichend eindeutigen Definitionen, da der Begriff der Umgebung von S nicht genügend präzisiert ist. Mit Rücksicht darauf, daß die Einleitung nur zur Orientierung des Lesers dienen soll, darf wohl bezüglich einer einwandfreien Definition auf die Bendixsonsche Originalabhandlung S. 19—25 verwiesen werden bzw. auf die ausführliche Analyse der Bendixsonschen Theorie, die sich am Ende des Kapitels II der vorliegenden Untersuchung finden wird. Bereits Poincaré kennt Paßgebiete (cols) und Strahlengebiete (noeuds) (**1**, S. 387—388), während auf die Schleifengebiete erst in der Bendixsonschen Abhandlung aufmerksam gemacht wird. — Die Unterscheidung von singulärer Stelle erster Art und zweiter Art findet sich in der Formulierung unseres Textes weder bei Poincaré noch bei Herrn Bendixson. Doch tritt die besondere Wichtigkeit von geschlossenen und spiralförmigen Scharkurven auch schon in den Abhandlungen dieser beiden Mathematiker scharf hervor (vgl. auch die Fußnoten [13]), [14]) und [15]).

II. *in einem Strahlengebiete, wenn die Scharkurve durch P von S ausgeht, um dann die Umgebung von S zu verlassen (Beisp. die Punkte B_1, B_2 der Fig. 1);*

III. *in einem Sattelgebiete, wenn die Scharkurve durch P den Punkt S nicht enthält, sondern nach beiden Seiten hin die Umgebung von S verläßt (Beisp. die Punkte C_1, C_2 der Fig. 1).*

Nunmehr zieht Herr Bendixson eine beliebige geschlossene Jordankurve γ, die ganz in der Umgebung von S gelegen ist, ohne S selbst zu enthalten, zählt die Anzahl der verschiedenen Schleifengebiete, Strahlengebiete und Sattelgebiete, die γ durchläuft, und *setzt den Index i von S im wesentlichen gleich der Anzahl der Sattelgebiete vermindert um die Anzahl der Schleifengebiete, die Punkte von γ enthalten*[12]) (l. c. S. 39. Beispielsweise durchläuft in der Fig. 1 die Kurve γ zwei Sattelgebiete auf den Stücken 1...2, 4...5, drei Schleifengebiete auf den Stücken 3...4, 5...6, 7...1, zwei Strahlengebiete auf den Stücken 2...3, 6...7. Der Index i von S ist mithin in der Fig. 1 gleich -1).

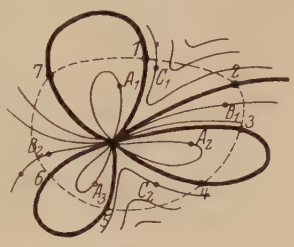

Fig. 1.

[12]) Um die Einleitung nicht zu stark anwachsen zu lassen, verzichte ich an dieser Stelle darauf, genauer zu definieren, wann zwei Punkte den gleichen, wann verschiedenen Sattelgebieten bzw. Schleifengebieten angehören und begnüge mich damit, dies hier durch die Fig. 1 anschaulich zu machen.

Die Bendixsonsche Bezeichnungsweise gestattet die von Poincaré behandelten speziellen Singularitäten näher zu kennzeichnen. Poincaré kennt nur solche Singularitäten erster Art, in deren Umgebung sich vier Sattelgebiete oder Strahlengebiete befinden, mithin nur Singularitäten vom Index 0 oder 4. — Herr Bendixson zeigt weiter (S. 38—44), daß sein Verfahren, den Index zu berechnen, zum gleichen Ergebnis führt wie die in **1**, S. 400—403 angegebene Poincarésche Methode.

Übrigens stimmen die Zahlenwerte der Poincaré-Bendixsonschen Indizes nicht ganz mit denen unseres Textes überein. Bezeichnet i_P den Poincaréschen Index, i_T den Index unseres Textes, so ist $i_P = \frac{i_T}{2} - 1$. Bei Poincaré ist mithin der Index einer singulären Stelle immer entweder $+1$ oder -1. Die (*) entsprechende Formel von Poincaré lautet in Poincaréschen Indexzahlen $-\sum_{\varkappa=1}^{k} i_\varkappa = 2-2p$. (**3**, S. 203—208), oder in der Bezeichnungsweise unseres Textes $\sum_{\varkappa=1}^{k}\left(1-\frac{i_\varkappa}{2}\right)=2-2p$. (Vgl. Formel (**) aus Abschnitt **10**.)

Etwas allgemeinere Singularitäten berücksichtigt ein Beweis dieser Formel in einer Abhandlung des Herrn W. v. Dyck: Beiträge zur Analysis situs. 1. Mittlg. Ber. d. Kgl. Sächs. Ak. d. Wiss. zu Leipzig **37** (1885), S. 314—325. Vgl. insbesondere S. 317—320. Hier sind außer den Poincaréschen Singularitäten vom Index $i_T = 0$ auch solche Singularitäten berücksichtigt, in deren Umgebung sich n Sattelgebiete, aber

8. Kehren wir nun zu dem Fall zurück, daß S eine singuläre Stelle erster Art eines Kurvennetzes mit *geradem* Index r ist. Dann läßt sich das Netz in der Umgebung von S in zwei Kurvenscharen A und B zerlegen; es zeigt sich ferner, daß man in dem hier behandelten allgemeinsten Fall, wo nur Stetigkeit der Kurven und nicht einmal die Existenz von Kurventangenten vorausgesetzt ist, genau ebenso Schleifengebiete und Sattelgebiete unterscheiden kann.

Sind ferner i_A bzw. i_B die nach dem Bendixsonschen Verfahren bestimmten Indizes von S, wenn S einmal als singulärer Punkt der Schar A das zweite Mal als singulärer Punkt der Schar B angesehen wird, so ergibt sich

$$\textit{erstens}: i_A = i_B, \qquad \textit{zweitens}: i_A + i_B = 2\,i_A = r.$$

Es sei der Index r einer in einem Netze singulären Stelle S eine ungerade Zahl; faßt man nunmehr das Netz in der Umgebung von S als eine einzige Kurvenschar auf, die in einem Bereiche einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit S als Windungspunkt gelegen ist, so sei i der Index von S, und man beweist leicht, daß hier $i = r$ ist.

Durch den Zusammenhang, der zwischen den Zahlen i und r besteht, ist erst aufgeklärt, in welcher Weise der Index r durch die wirkliche Gestalt des Kurvennetzes um S bestimmt ist.

9. Ist S eine Singularität zweiter Art des Kurvennetzes, so läßt sich das Netz in der Umgebung von S, da der Index von S Null ist, in zwei einfache Kurvenscharen A und B zerlegen. In diesem Falle treten Sattelgebiete indessen überhaupt nicht mehr auf. Außerdem können höchstens die Kurven der einen der beiden Scharen ein Strahlengebiet bilden; in der anderen Schar bzw. in beiden Scharen A und B erscheint S entweder als „*Wirbelpunkt*“ (*centre*)[13]) einer Menge ineinander geschachtelter geschlossener Scharkurven, die sich gegen S zusammenziehen, oder als *asymptotischer Punkt von spiralförmigen Scharkurven* (*foyer*)[14]). *In allen diesen Fällen ist der Index von S in bezug auf jede der beiden Scharen gleich Null*[15]); *mithin auch hier*: $r = 2\,i = 0$.

weder Strahlen- noch Schleifengebiete befinden ($i_T = n$). Im übrigen sind, dem in anderer Richtung liegenden v. Dyckschen Ziele entsprechend, implizite im v. Dyckschen Beweise noch eine Reihe weiterer spezieller Annahmen enthalten; wie z. B. daß keine um eine geschlossene Linie gewundenen Spirallinien auftreten, u. a. m.

[13]) Der Begriff „*centre*“ findet sich bei Poincaré **1**, S. 391 und bei Bendixson S. 26. Doch ist der Poincarésche Begriff des „*centre*“ enger als bei Bendixson. Vgl. die Fußnote auf S. 26 der Bendixsonschen Abhandlung.

[14]) Der Begriff „*foyer*“ findet sich bei Poincaré **1**, S. 396. Vgl. auch Fußnote [6]).

[15]) Bei Poincaré ist der Index eines „*centre*“ **3**, S. 206, der Index eines „*foyer*“ **1**, S. 401—403 und **3**, S. 205—206 bestimmt.

10. Ist auf einer zweiseitigen geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlechte p eine einfache Kurvenschar A vorgelegt, so soll *ein Punkt P von* $\mathfrak{F}$ *regulärer Punkt der Schar* A *heißen, wenn sich eine Umgebung* $\mathfrak{U}$ *von P umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Bereich* $\mathfrak{X}$ *der xy-Ebene abbilden läßt, derart, daß das Bild der Schar von Kurvenstücken aus* $\mathfrak{U}$ *eine Schar unter sich paralleler Gradenstücke aus* $\mathfrak{X}$ *wird.* Sind nun alle Punkte von $\mathfrak{F}$ reguläre Punkte der Schar mit Ausnahme von endlich vielen singulären Punkten $S_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, so kann man in mannigfacher Weise eine zweite Kurvenschar B auf $\mathfrak{F}$ so definieren, daß die beiden Scharen A und B sich zu einem Kurvennetze zusammensetzen, welches nur in den k Punkten $S_\varkappa$ singulär ist[16]). Aus den in den Abschnitten **8** und **9** angeführten Ergebnissen folgt, daß die $S_\varkappa$ dann auch die einzigen Singularitäten der Schar B sind, daß ferner der Index $i_\varkappa$ von $S_\varkappa$ derselbe bleibt, ganz gleich, ob $S_\varkappa$ als singuläre Stelle der Schar A oder der Schar B betrachtet wird, und daß endlich $r_\varkappa = 2\,i_\varkappa$ ist, wenn unter $r_\varkappa$ der Index der Netzsingularität $S_\varkappa$ verstanden wird.

Setzt man in Formel (*) $r_\varkappa = 2\,i_\varkappa$ ein, so ergibt sich die Poincarésche Beziehung (vgl. Fußnote [12]))

$$(**) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k}\left(1 - \frac{i_\varkappa}{2}\right) = 2 - 2\,p$$

in voller Allgemeinheit für jede auf $\mathfrak{F}$ definierte Kurvenschar mit k isolierten singulären Stellen $S_\varkappa$ vom Index $i_\varkappa$.[17])

---

[16]) Die Definition der zweiten Kurvenschar B auf $\mathfrak{F}$ gelingt dadurch, daß man die von der Schar A überdeckte Fläche $\mathfrak{F}$, aus der man hinreichend kleine Umgebungen der singulären Stellen entfernt hat, in geeigneter Weise in endlich viele elementare Teile zerlegt, in welchen sich leicht die Kurvenscharen zu regulären Netzvierecken ergänzen lassen. Um nun diese Zerlegung zu bewerkstelligen, zieht man eine endliche Anzahl von Querkurvenstücken, welche die Scharkurven schneiden und noch gewissen weiteren Bedingungen genügen. Vgl. den Anhang einer Abhandlung von H. Kneser, Untersuchungen zur Quantentheorie, Math. Ann. **84** (1921), S. 300–302, wo die Existenz endlich vieler Querkurvenstücke mit bestimmten Eigenschaften die Grundlage interessanter topologischer Betrachtungen über Kurvenscharen bildet.

[17]) Nach Abschluß meines Manuskriptes erfuhr ich durch eine freundliche briefliche Mitteilung von Herrn Hellmuth Kneser, daß dieser auch im Besitze eines Beweises für die Poincarésche Formel in sehr allgemeinen Fällen ist. Seine Methode, den Index $i_\varkappa$ der Singularität zu bestimmen, ist der Methode der vorliegenden Note sehr ähnlich. Vergleiche die Andeutungen der Kneserschen Methoden und Ergebnisse in dem Verhandlungsberichte des Naturforschertages in Jena. Jahresber. d. D. M. V. **30** (1921), 2. Abteilung, S. 84.

Es sei endlich noch auf ein im Druck befindliches Buck über Topologie von Herrn von Kerékjártó hingewiesen, in dem ein ausführlicher Abschnitt den Kurvenscharen gewidmet ist.

11. Ist umgekehrt $\mathfrak{F}$ von einem Netz überdeckt, das nur isolierte singuläre Stellen $S_\varkappa$ von gerader Indexzahl enthält, so läßt sich, wie an passender Stelle des Kapitels II bewiesen wird, das *Gesamtnetz* in zwei Kurvenscharen A und B zerlegen, die nur die Punkte $S_\varkappa$ zu singulären Punkten mit dem Index $i_\varkappa$ haben. Setzt man nunmehr die Poincarésche Formel (**) bereits als bekannt voraus, so folgt unsere Fundamentalformel (*), indem man in (**) $i_\varkappa = \frac{r_\varkappa}{2}$ einsetzt.

Enthält endlich das Netz, das auf $\mathfrak{F}$ definiert ist, auch singuläre Punkte von ungeradem Index und sind R_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, h)$ alle diese Punkte, so läßt sich das Netz als eine einzige Kurvenschar auf einer $\mathfrak{F}$ überlagerten zweiblättrigen Riemannschen Fläche auffassen, welche die h Punkte R_λ und nur diese zu Windungspunkten hat. Auch in diesem Falle läßt sich (*) aus (**) ableiten, wenn man berücksichtigt, daß an den Stellen R_λ die Indizes $i_\lambda = r_\lambda$ sind und daß für das Geschlecht p' der $\mathfrak{F}$ überlagerten Riemannschen Fläche die Formel $p' = 2p + \frac{h}{2} - 1$ gilt.

Kapitel I.

Theorie der Indizes einer singulären Stelle.

§ 1.

Beweis der Fundamentalformel.

12. Definition. Ein auf einer gekrümmten oder ebenen Fläche gelegenes zweidimensionales Gebiet $\mathfrak{G}$ sei vollständig von einem Kurvennetz überdeckt, derart, daß alle Punkte von $\mathfrak{G}$ bis auf endlich viele reguläre Punkte des Netzes sind. Im Innern von $\mathfrak{G}$ sei ein einfach zusammenhängender Bereich $\mathfrak{P}$ gegeben, dessen Rand $\mathfrak{p}$ nur reguläre Punkte des Netzes enthält und sich aus endlich vielen Stücken von Netzlinien zusammensetzt. $\mathfrak{P}$ nennen wir ein Netzpolygon, $\mathfrak{p}$ einen Polygonzug. Die Punkte, in denen Stücke verschiedener Netzlinien zusammenstoßen, heißen Ecken, die Stücke von $\mathfrak{p}$, die die Ecken verbinden, heißen Seiten des Netzpolygons; endlich unterscheiden wir einspringende von ausspringenden Ecken, je nachdem die Fortsetzungen der beiden in der Ecke zusammenstoßenden Netzlinienstücke über die Ecke hinaus sich beide ins Innere von $\mathfrak{P}$ erstrecken bzw. beide außerhalb von $\mathfrak{P}$ gelegen sind[18]).

[18]) Aus der Definition eines regulären Netzpunktes des Abschnittes 1 folgt, daß in jedem regulären Punkte sich zwei Netzlinien kreuzen (vgl. Fußnote [2])). Daher müssen die Fortsetzungen der beiden in einer Ecke von $\mathfrak{P}$ zusammenstoßenden Netzlinienstücke entweder beide gleichzeitig im Innern von $\mathfrak{P}$ oder beide gleichzeitig außerhalb von $\mathfrak{P}$ gelegen sein.

Ist a die Anzahl der ausspringenden, e die Anzahl der einspringenden Ecken von $\mathfrak{p}$, so sagen wir, $\mathfrak{P}$ ist ein Netzpolygon vom Typus $a - e = r$.

Zum Beispiel ist ein von einer geschlossenen doppelpunktlosen Netzlinie begrenzte einfach zusammenhängende Bereich als ein Netzpolygon vom Typus Null anzusehen. Hat eine Netzlinie einen einzigen Doppelpunkt und begrenzt das Stück der Netzlinie, das vom Doppelpunkt zu diesem wieder zurückführt, einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ ein Netzpolygon vom Typus -1 oder $+1$, je nachdem die Fortsetzungen des Netzlinienstückes über den Doppelpunkt hinaus sich ins Innere von $\mathfrak{P}$ erstrecken oder nicht.

13. Auf einer zweiseitigen im Sinne der Analysis Situs singularitätenfreien geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlechte p sei ein Kurvennetz definiert, so wie es in Abschnitt **1** beschrieben ist, und zwar seien alle Punkte von $\mathfrak{F}$ reguläre Punkte des Netzes mit Ausnahme von k isolierten singulären Punkten $S_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$.

Um jeder der k singulären Stellen einen Index zuzuordnen, grenze man um jedes $S_\varkappa$ einzeln eine Umgebung $\mathfrak{U}_\varkappa$ ab, derart, daß $\mathfrak{U}_\varkappa$ keine weiteren singulären Stellen außer $S_\varkappa$ enthält, und daß zwei zu verschiedenen $S_\varkappa$ gehörigen Bereiche $\mathfrak{U}_\varkappa$ keinen gemeinsamen Punkt enthalten. Ganz im Innern von $\mathfrak{U}_\varkappa$ ziehe man eine geschlossene Jordankurve $\gamma_\varkappa$, die $S_\varkappa$ umkreist, ohne $S_\varkappa$ zu enthalten, mithin nur aus regulären Punkten besteht. Nunmehr überdecke man, indem man sich auf die Ausführungen des Abschnittes **2** stützt, jeden Punkt von $\gamma_\varkappa$ durch ein reguläres Netzviereck, das hinreichend klein konstruiert werde, damit es ganz im Innern von $\mathfrak{U}_\varkappa$ gelegen ist. Ein oft angewandter, fundamentaler Satz der Theorie der Punktmengen von Heine-Borel gestattet, aus dieser unendlichen Menge von Netzvierecken eine endliche Anzahl auszuwählen, derart, daß diese endlich vielen Netzvierecke einen ringförmigen Bereich $\mathfrak{R}_\varkappa$ vollständig überdecken, welcher $\gamma_\varkappa$ ganz in seinem Innern enthält. Sei $\mathfrak{p}_\varkappa$ der äußere Rand von $\mathfrak{R}_\varkappa$, dann ist $\mathfrak{p}_\varkappa$ ein ganz im Innern von $\mathfrak{U}_\varkappa$ gelegener Polygonzug und begrenzt ein Netzpolygon $\mathfrak{P}_\varkappa$. *Ist jetzt $\mathfrak{P}_\varkappa$ vom Typus $r_\varkappa$, so sei $r_\varkappa$ der Index von $S_\varkappa$.*

Aus dieser Konstruktion geht noch nicht hervor, daß zu jeder Singularität $S_\varkappa$ ein Index $r_\varkappa$ in eindeutiger Weise bestimmt ist. Dies wird erst in § 4 nachträglich gezeigt werden. Wenn im folgenden der singulären Stelle $S_\varkappa$ der Index $r_\varkappa$ zugeordnet ist, so besagt das zunächst nur: *es existiert mindestens ein fester Polygonzug $\mathfrak{p}_\varkappa$, der einen einfach zusammenhängenden, nur die eine Singularität $S_\varkappa$ enthaltenden Bereich $\mathfrak{P}_\varkappa$ begrenzt und bei dem die Anzahl der ausspringenden Ecken vermindert um die Anzahl der einspringenden Ecken gleich $r_\varkappa$ ist.*

14. Nachdem durch das geschilderte Konstruktionsverfahren zu jeder singulären Stelle $S_\varkappa$ auf $\mathfrak{F}$ ein Index $r_\varkappa$ bestimmt ist, wird behauptet

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\left(1-\frac{r_\varkappa}{4}\right)=2-2p. \tag{1}$$

Zum Beweise denke man sich die k Netzpolygone $\mathfrak{P}_\varkappa$ aus der Fläche $\mathfrak{F}$ herausgeschnitten, so daß ein Bereich $\mathfrak{F}^*$ zurückbleibt, der von k Randkurven, den Netzpolygonzügen $\mathfrak{p}_\varkappa$, begrenzt ist ($\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^*+\sum_{\varkappa=1}^{k}\mathfrak{P}_\varkappa$). Jeder Punkt von $\mathfrak{F}^*$ ist nach Voraussetzung regulärer Punkt des Netzes.

Der Beweis setzt sich nun aus zwei Schritten zusammen: erstens wird das überall reguläre Netz auf $\mathfrak{F}^*$ in endlich viele Netzvierecke zerlegt, die sich längs ihren Seiten berühren, ohne außer den Randpunkten gemeinsame Punkte zu haben, und zweitens wird auf dieses Gebilde der Eulersche Polyedersatz angewandt.

15. Erster Schritt. Da in $\mathfrak{F}^*$ das Netz überall regulär ist, so denke man sich um jeden Punkt von $\mathfrak{F}^*$ ein reguläres Netzviereck konstruiert und auf Grund des Heine-Borelschen Satzes aus diesen unendlich vielen Netzvierecken eine Menge N^* von endlich vielen regulären Netzvierecken so ausgewählt, daß jeder Punkt von $\mathfrak{F}^*$ innerer Punkt eines Netzvierecks der Menge N^* ist. Diejenigen Netzvierecke von N^*, welche Randpunkte von $\mathfrak{F}^*$, d. h. Punkte der Polygonzüge $\mathfrak{p}_\varkappa$ im Innern enthalten, erstrecken sich über $\mathfrak{F}^*$ hinaus in das Innere der Netzpolygone $\mathfrak{P}_\varkappa$; sie werden aber, indem man die Seiten von $\mathfrak{P}_\varkappa$ über die Ecken hinaus verlängert, in eine größere Zahl kleinerer Netzvierecke zerfallen, die entweder nur Punkte von $\mathfrak{F}^*$, oder aber überhaupt keine inneren Punkte von $\mathfrak{F}^*$ enthalten. Diese letzteren streiche man aus der Menge N^* und bezeichne die so abgeänderte Menge mit N.

Die Netzvierecke der Menge N enthalten mithin nur Punkte von $\mathfrak{F}^*$, aber sie berühren sich nicht nur, wie verlangt, längs ihrer Seiten, sondern sie ragen vielmehr teilweise ineinander hinein. Da aber offenbar der zwei Netzvierecken gemeinsame Bereich wieder ein reguläres Netzviereck ist, so gelingt es, indem man weitere Stücke von Netzlinien zieht, die einzelnen Netzvierecke in eine endliche Summe von kleineren regulären Netzvierecken zu zerlegen, derart, daß $\mathfrak{F}^*$ mit Netzvierecken gleichsam gepflastert ist und die Zerlegung von $\mathfrak{F}^*$ in Netzvierecke allen gestellten Bedingungen genügt.

16. Zweiter Schritt. Nunmehr fasse man dieses Gebilde von Netzvierecken, vermehrt um die k Polygone $\mathfrak{P}_\varkappa$, als geschlossenes Eulersches Polyeder Π vom Geschlechte p auf.

Ist α_0 die Anzahl der Ecken von II, so haben wir fünf verschiedene Typen von Ecken zu unterscheiden und setzen

$$\alpha_0 = a + e + l + m_3 + m_4. \tag{2}$$

Hierbei ist $a + e + l$ die Anzahl der auf dem Rande von $\mathfrak{F}^*$ gelegenen Ecken von II, und zwar bezeichnet (a bzw. e) die Anzahl sämtlicher Polyederecken, welche gleichzeitig ausspringende (bzw. einspringende) Ecken der Netzpolygone $\mathfrak{P}_\varkappa$ sind (vgl. die Punkte A bzw. E von Fig. 2), während l die Anzahl der übrigen auf den Polygonseiten gelegenen Polyederecken bedeutet (vgl. die Punkte L von Fig. 2). Diese letzteren entstehen dadurch, daß in ihnen zwei Netzvierecke und das Polygon $\mathfrak{P}_\varkappa$ zusammenstoßen, so daß von ihnen drei Polyederkanten ausgehen. m_3 bzw. m_4 bezeichne die Anzahl der im Innern von $\mathfrak{F}^*$ gelegenen Polyederecken, in denen drei bzw. vier Netzvierecke zusammenstoßen (vgl. die Punkte M_3 bzw. M_4 von Fig. 2).

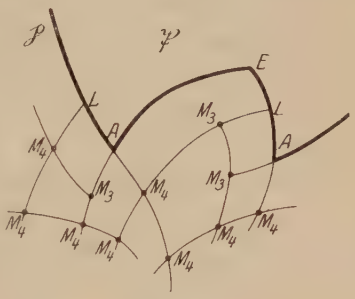

Fig. 2.

Ist α_1 die Anzahl der Kanten von II, so ergibt sich

$$2\alpha_1 = 4a + 2e + 3l + 3m_3 + 4m_4. \tag{3}$$

Bei der Aufstellung dieser Formel ist zu berücksichtigen, daß (vgl. Fig. 2) zur Konstruktion des Polyeders 1. die Seiten von $\mathfrak{p}_\varkappa$ über die ausspringenden Ecken hinaus ins Innere von $\mathfrak{F}^*$ hinein verlängert werden müssen, 2. daß an den einspringenden Ecken der $\mathfrak{P}_\varkappa$ als einzige Polyederkanten zwei Seiten von $\mathfrak{P}_\varkappa$ zusammenstoßen.

Ist α_2 die Anzahl der Seitenflächen von II, n die Anzahl der Netzvierecke, in die $\mathfrak{F}^*$ zerlegt ist, so ist

$$\alpha_2 = n + k. \tag{4}$$

Um die Zahl n durch die Zahlen a, e, l, m_3, m_4 auszudrücken, bedenke man, wie oft jede einzelne Polyederecke gleichzeitig als Eckpunkt der Netzvierecke erscheint. Offenbar (vgl. Fig. 2) ist jede ausspringende (bzw. einspringende) Ecke von $\mathfrak{P}_\varkappa$ Ecke von drei (bzw. einem) Netzvierecken; jede von den Ecken von $\mathfrak{P}_\varkappa$ verschiedene Polyederecke L auf $\mathfrak{p}_\varkappa$ ist Ecke von zwei dort zusammenstoßenden Netzvierecken. Die im Innern von $\mathfrak{F}^*$ gelegenen Polyederecken sind entweder Ecken von vier Netzvierecken, wenn in ihnen vier Netzvierecke, oder aber Ecken von nur *zwei* Netzvierecken, wenn in ihnen drei Netzvierecke zusammenstoßen. (Denn im letzteren Falle ist die Polyederecke zwar Eckpunkt von zweien der Netz-

vierecke, liegt aber mitten auf der Seite des dritten Netzvierecks.) Mithin ergibt sich

$$4n = 3a + e + 2l + 2m_3 + 4m_4, \tag{5}$$

und weiter, indem man (2), (3), (4) und (5) zusammenfaßt,

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = k - \frac{1}{4}(a - e).$$

Aus der Definition für die Indizes $r_\varkappa$ folgt aber $a - e = \sum_{\varkappa=1}^{k} r_\varkappa$, mithin

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \sum_{\varkappa=1}^{k} \left(1 - \frac{r_\varkappa}{4}\right). \tag{6}$$

Da aber nach dem Eulerschen Polyedersatz

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p$$

ist, so folgt aus (6) die behauptete Relation (1), w. z. b. w.

§ 2.

Indizes von Bereichen, Häufungsstellen von Singularitäten.

17. Es bleibt noch übrig, zu zeigen, daß der Index $r_\varkappa$, den wir der Singularität $S_\varkappa$ zuordnen, von der speziellen Konstruktion des Polygonzuges $\mathfrak{p}_\varkappa$, mit dem man $S_\varkappa$ umgibt, unabhängig ist, oder anders formuliert: Sind $\mathfrak{P}_\varkappa$ und $\mathfrak{P}'_\varkappa$ zwei verschiedene Netzpolygone, die die singuläre Stelle $S_\varkappa$ und nur diese enthalten, so sind beide Polygone $\mathfrak{P}_\varkappa$ und $\mathfrak{P}'_\varkappa$ vom gleichen Typus (im Sinne der Definition des Abschnittes **12**).

Es wäre keine große Mühe, diese Behauptung direkt zu beweisen; doch führt die Benutzung der Fundamentalformel (1) noch schneller zum Ziele.

Man denke sich die Singularität S_1 in zwei verschiedenen Netzpolygonen einmal in $\mathfrak{P}_1$ vom Typus r_1, das andere Mal in $\mathfrak{P}'_1$ vom Typus r'_1 gelegen, so daß nach der einen Konstruktion der singuläre Punkt S vom Index r_1, nach der anderen vom Index r'_1 ist, während die übrigen Singularitäten $S_\varkappa$ beide Male von den gleichen Polygonzügen $\mathfrak{p}_\varkappa$ umgeben seien. Im ersten Falle liefert die Formel (1)

$$1 - \frac{r_1}{4} + \sum_{\varkappa=2}^{k} \left(1 - \frac{r_\varkappa}{4}\right) = 2 - 2p,$$

im andern Falle

$$1 - \frac{r'_1}{4} + \sum_{\varkappa=2}^{k} \left(1 - \frac{r_\varkappa}{4}\right) = 2 - 2p,$$

daraus folgt aber $r_1 = r'_1$, w. z. b. w.

18. Ebenso wie einer singulären Stelle gestattet eine einfache Überlegung auch jedem einfach zusammenhängenden Bereiche $\mathfrak{B}$, dessen Rand γ eine sich nur aus regulären Punkten des Netzes zusammensetzende geschlossene Jordankurve ist, einen Index $\varrho(\mathfrak{B})$ zuzuordnen. Man überdecke nach dem in Abschnitt **13** geschilderten Verfahren γ mit endlich vielen Netzvierecken und erhält so ein Netzpolygon $\mathfrak{P}$, in dessen Innern der Bereich $\mathfrak{B}$ gelegen ist, derart, daß der von γ und vom Rande $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ begrenzte ringförmige Bereich nur reguläre Punkte des Netzes enthält. Der Index $\varrho(\mathfrak{B})$ werde nunmehr gleich dem Typus des Netzpolygons gesetzt.

Es bezeichne r_λ die Indizes der singulären Stellen, die im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegen sind, während die $r_{\lambda'}$ den außerhalb $\mathfrak{B}$ gelegenen Singularitäten zugeordnet seien; dann beweist man ebenso wie in § 1 die Beziehung

$$1 \quad \frac{\varrho(\mathfrak{B})}{4} + \sum_{\lambda'} \left(1 - \frac{r_{\lambda'}}{4}\right) = 2 \quad \cdot 2p$$

und somit wegen (1)

$$(7) \qquad 1 - \frac{\varrho(\mathfrak{B})}{4} = \sum_{\lambda} \left(1 - \frac{r_\lambda}{4}\right).$$

Bedeutet $\mathfrak{B}$ einen einfach zusammenhängenden Bereich, der nur reguläre Punkte des Netzes enthält, so folgt unmittelbar aus (7)

$$1 - \frac{\varrho(\mathfrak{B})}{4} = 0, \qquad \varrho(\mathfrak{B}) = 4.$$

Mithin ist bewiesen:

Hilfssatz.[19]) *Ein in jedem Punkte reguläres Netzpolygon ist immer vom Typus* 4.

19. Gestützt auf Formel (7) überzeugt man sich leicht, daß die Beziehung (1) ihre Gültigkeit behält, auch wenn die $r_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ die Indizes von einfach zusammenhängenden Bereichen $\mathfrak{B}_\varkappa$ bezeichnen, wofern nur zwei beliebige Bereiche $\mathfrak{B}_\varkappa$ und $\mathfrak{B}_{\varkappa'}$ keinen gemeinsamen Punkt enthalten und in dem Bereich $\mathfrak{F}^*$, der aus $\mathfrak{F}$ nach Entfernung der Bereiche $\mathfrak{B}_\varkappa$ entsteht, keine singulären Punkte des Netzes gelegen sind $(\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* + \sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{B}_\varkappa)$.

Stellt man auch noch $\mathfrak{F}^*$ als Summe von h Teilbereichen $\mathfrak{B}_\varkappa$ $(\varkappa = k+1, k+2, \ldots, k+h;\ \mathfrak{F}^* = \sum_{\varkappa=k+1}^{k+h} \mathfrak{B}_\varkappa,\ \mathfrak{F} = \sum_{\varkappa=1}^{k+h} \mathfrak{B}_\varkappa)$ mit den Indizes $r_\varkappa$ dar, wobei zwei verschiedene Bereiche $\mathfrak{B}_\varkappa$ keinen inneren Punkt gemein-

[19]) Einen direkten, einfachen Beweis dieses Hilfssatzes findet man in der Note des Verfassers: Ein Satz über Kurvennetze auf geschlossenen Flächen. Sitzber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin **21** (1922), S. 258–262; vgl. insbes. S. 260–261.

sam haben, so ist nach dem Hilfssatz, für $k+1 \leqq \varkappa \leqq k+h$, $r_\varkappa = 4$. Daraus ergibt sich, daß man die Beziehung (1) auch in der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{k+h} \left(1 - \frac{r_\varkappa}{4}\right) = 2 - 2p$$

schreiben kann, wo nunmehr die $r_\varkappa$ Indizes von beliebigen einfach zusammenhängenden Teilbereichen $\mathfrak{B}_\varkappa$ sind, deren Rand eine geschlossene Jordankure mit nur regulären Netzpunkten und deren Summe gleich der Gesamtfläche $\mathfrak{F}$ ist.

20. Indem man die Indizes den Bereichen zuordnet, gelingt es auch, nicht isolierte Singularitäten zu charakterisieren. Ist beispielsweise $S', S'', \ldots$ eine unendliche Folge isolierter Singularitäten, die sich gegen einen Punkt S häufen, so läßt sich eine Folge von ineinandergeschachtelten einfach zusammenhängenden Bereichen $\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ mit zugeordneten Indizes $\varrho^{(\lambda)}$ konstruieren, derart, daß $\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ die Singularitäten $S^{(\lambda)}, S^{(\lambda+1)}, \ldots \to S$ und nur diese enthält. Dann ist

$$1 - \frac{\varrho^{(\lambda)}}{4} = 1 - \frac{\varrho^{(\lambda+1)}}{4} + 1 - \frac{r^{(\lambda)}}{4},$$

unter $r^{(\lambda)}$ den Index von $S^{(\lambda)}$ verstanden. Der Folge von Singularitäten, die sich gegen S häufen, werde nunmehr die Folge der Indizes $\varrho^{(\lambda)}$ zugeordnet.

Um endlich Formel (1) anzuwenden, muß man wieder $\mathfrak{F}$ als Summe von endlich vielen einfach zusammenhängenden Teilbereichen $\mathfrak{B}_\varkappa$ vom Index $r_\varkappa$ darstellen, wobei $\mathfrak{B}_\varkappa$ durch eine geschlossene Jordankurve, die nur reguläre Punkte enthält, begrenzt wird.

§ 3.

Folgerungen aus der Fundamentalformel.

21. Aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen folgert man leicht einen Satz, der eine von Herrn H. Kneser[20]) entdeckte Eigenschaft von Kurvenscharen auf Kurvennetze überträgt.

Satz. *Läßt sich eine zweiseitige geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ von einem Kurvennetz derart überdecken, daß jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ regulärer Punkt des Netzes ist, so ist $\mathfrak{F}$ vom Geschlechte* 1.

Beweis. Stellt man $\mathfrak{F}$ als Summe von k einfach zusammenhängenden Teilbereichen $\mathfrak{B}_\varkappa$ dar ($\mathfrak{F} = \sum_{\varkappa=1}^{k}{}' \mathfrak{B}_\varkappa$), so ist, da nach Voraussetzung $\mathfrak{F}$ und um so mehr also $\mathfrak{B}_\varkappa$ nur reguläre Punkte des Netzes enthält, der Index $r_\varkappa$

[20]) l. c. Fußnote [16]).

von $\mathfrak{B}_\varkappa$ nach dem Hilfssatz des Abschnittes 18 gleich 4. Formel (1) ergibt daher

$$2 - 2p = \sum_{\varkappa=1}^{k} \left(1 - \frac{r_\varkappa}{4}\right) = 0,$$

mithin $p = 1$, w. z. b. w.

22. Ist $\mathfrak{F}$ eine geschlossene zweiseitige Fläche vom Geschlechte $p \neq 1$, so liegt die Frage nahe, ob sich $\mathfrak{F}$ durch ein Kurvennetz überdecken läßt, das nur eine einzige Singularität enthält. Dieser einzige singuläre Punkt werde mit S und sein Index mit r bezeichnet; dann folgt aus (1)

$$1 - \frac{r}{4} = 2 - 2p, \qquad r = 8p - 4. \tag{8}$$

Für den Fall $p = 0$ erhält man durch stereographische Projektion der achsenparallelen Geraden der xy-Ebene auf eine Kugel ein besonders einfaches Kurvennetz mit nur einer Singularität[21]).

Aus Formel (8) ergibt sich $r_\varkappa = -4$ für $p = 0$, aber $r_\varkappa \geqq 12$ für $p \geqq 2$. Im Falle $p \geqq 2$ wird man daher versuchen, $\mathfrak{F}$ durch ein Netz zu überdecken, von dessen einziger singulärer Stelle $r = 8p - 4$ Netzlinien ausgehen.

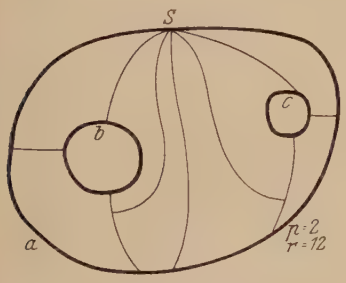

Fig. 3a.

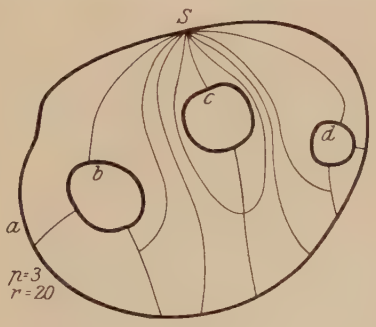

Fig. 3b.

Die Fig. 3a (bzw. 3b) zeigt die eine Hälfte einer geschlossenen Fläche vom Geschlechte $p = 2$ (bzw. $p = 3$) mit 2 (bzw. 3) Löchern, die längs der Netzlinien a, b und c (bzw. a, b, c und d) in zwei Teile zerschnitten ist. Die Figuren verdeutlichen eine Zerlegung der Fläche $\mathfrak{F}$ in Netzvierecke, wobei in der einzigen singulären Stelle S genau 12 (bzw. 20) Netzvierecke (davon sind in der Figur sichtbar 6 bzw. 10 Netzvierecke) zusammenstoßen. Ganz entsprechend läßt sich nach dem aus der Figur erkennbaren Verfahren eine zweiseitige geschlossene Fläche mit p Löchern derart in Netzvierecke zerlegen, daß nur ein singulärer Punkt S entsteht, in dem $8p - 4$ Netzvierecke zusammenstoßen.

[21]) Vgl. auch die in Fußnote [19]) zitierte Note des Verfassers.

23. Es sei $\mathfrak{F}$ eine geschlossene konvexe zweimal stetig differtiierbare Fläche. Man denke sich $\mathfrak{F}$ durch ein System von Krümmungslinien überdeckt, dann sind, da $\mathfrak{F}$ konvex ist, die Nabelpunkte die einzigen singulären Stellen des von den Krümmungslinien gebildeten Kurvennetzes auf $\mathfrak{F}$.

Satz. *Die Anzahl der Nabelpunkte auf einer geschlossenen konvexen zweimal stetig differentiierbaren Fläche $\mathfrak{F}$ sei endlich, und außerdem sei jeder der Nabelpunkte topologisch von gleichem Typus wie die Nabelpunkte eines allgemeinen Ellipsoides (aber nicht eines Rotationsellipsoides), d. h. eine singuläre Stelle vom Typus 2. Unter diesen Voraussetzungen ist die Anzahl k der Nabelpunkte gleich* 4.

Beweis. Nach Voraussetzung ist der Index $r_\varkappa$ aller k Singularitäten gleich 2. Da eine konvexe Fläche immer vom Geschlechte 0 ist, so ergibt sich aus Formel (1)

$$k\left(1-\frac{2}{4}\right)=2,$$

mithin $k=4$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 5. März 1923.)

Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series.

By

G. H. Hardy in Oxford and J. E. Littlewood in Cambridge.

1. Introduction.

1.1. In this memoir we solve a problem which has apparently not been stated in quite the same form before. The nature of the problem is most easily explained in terms of Fourier series.

The "convergence problem" for Fourier series is still unsolved. If $f(t)$ is integrable (L)[1]) in $(-\pi, \pi)$, and $t = x$ is a point of the interval, there is no simple property of $f(t)$ which is known to be both necessary and sufficient for the convergence of its Fourier series when $t = x$. There are simple sufficient conditions, but these are known not to be necessary; and the necessary conditions are known not to be sufficient.

The same gap appears when we consider the summability of the series by an assigned Cesàro mean, for example its summability $(C, 1)$. This problem is, as Fejér has shown, in some ways more fundamental than that of convergence, and it also is unsolved. Thus continuity of the function is sufficient for summability $(C, 1)$ of the series, but it is by no means necessary.

The question which we raise here is different. We ask, not when the series is summable by some particular mean, but when it is summable *by some mean or another*, *i. e.* when it is *summable* (C). And the justification for insistence on this particular question is that it happens to admit a quite simple and complete solution, not only for Fourier series but for power-series as well. That this should be so is not altogether surprising. The reader who is familiar with the work of H. Bohr and

[1]) Integrable in the sense of Lebesgue, i. e. "summable". The latter word would be very embarrassing in this memoir. We might say "integrable" simply; but we shall have occasion later to use the word in a slightly extended sense.

M. Riesz will remember that there is a similar phenomenon in the theory of Dirichlet's series. The "convergence problem" for a Dirichlet's series $\Sigma a_n n^{-s}$, the problem of determining the abscissa of convergence of the series in terms of the properties of the analytic function $f(s)$ associated with the series, is unsolved. So is the problem of determining the various abscissae of summability; but the limit of these abscissae, the number A such that the series is summable when $\sigma > A$,[2]) and not when $\sigma < A$, can be defined in the manner required: it is the least number λ for which $f(s)$ is regular, and of finite order in t, when $\sigma \geqq \lambda + \varepsilon > \lambda$.[3])

1.2. In § 2 we prove a general arithmetic theorem (a theorem in the pure theory of infinite series) on which all our subsequent reasoning depends. The statement of this theorem (Theorem A) requires a few words of preface. We take our series in the form

$$A = \Sigma a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots,$$

and use A either for the series or for its sum (when it is summable). We write

$$A_n = A_n^0 = a_0 + a_1 + \dots + a_n,\ A_n^1 = A_0^0 + \dots + A_n^0,\ A_n^2 = A_0^1 + \dots + A_n^1, \dots$$

with a corresponding notation in other letters. If $C_n = 1$, so that

$$C_n^r = \frac{(n+r)(n+r-1)\dots(n+1)}{r!} = \frac{\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(r+1)},$$

and

$$A_n^r \sim C_n^r A,$$

the series is said to be summable (C, r) to sum A; and in these circumstances we write

$$\Sigma a_n = A \quad (C, r).$$

Summability $(C, 0)$ is the same thing as convergence; and A is said to be summable $(C, -1)$ if it is convergent and $na_n \to 0$.[4]) We are not, except in two subsidiary theorems, concerned with non-integral orders of summability.

[2]) $s = \sigma + it$.

[3]) See, for example, G. H. Hardy and M. Riesz: The general theory of Dirichlet's series, Camb. Math. Tracts **18** (1915), p. 56.

[4]) This definition of summability $(C, -1)$ has been used by W. H. Young: On the convergence of the derived series of Fourier series, Proc. London Math. Soc. (2), **17** (1916), pp. 195–236 (209–210). There is another memoir of Young [On the convergence of a Fourier series and its allied series, Proc. London Math. Soc. (2), **10** (1911), pp. 254–272] which contains a number of ideas which we have found of great value in this investigation, in particular the idea of a connection be-

We say that

$$u_n \to u \quad (C, r)$$

if the series whose n-th partial sum is u_n is summable (C, r) to sum u. Thus A is summable (C, r) if, and only if, $A_n \to A$ (C, r).

We assume certain elementary properties of summable series which are recapitulated in § 2. 4; all are direct consequences of the definitions. An excellent account of the general theory, for both integral and non-integral orders of summability, may be found in a dissertation by Andersen[5].

Theorem A. *The necessary and sufficient condition that* $A = \Sigma a_n$ *should be summable* (C, r) *is that there should be a system of numbers*

$$a_{n,s} \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, r+1;\ n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.21}$$

such that

$$a_{n,0} = a_n, \quad a_{n,s-1} = (n+1)(a_{n,s} - a_{n+1,s}) \qquad (s > 0), \tag{1.22}$$

and $A_{r+1} = \Sigma a_{n,r+1}$ *is summable* $(C, -1)$. *In these circumstances*

$$a_{n,s} = \sum_{n}^{\infty} \frac{a_{\nu,s-1}}{\nu+1} \quad (C, r-s) \tag{1.23}$$

for $s = 1, 2, \ldots, r+1$; *the series* A_s *is summable* $(C, r-s)$; *and the sums of all the series are the same.*

There are a number of variants of this theorem, sometimes more useful than the theorem itself. Before passing on to our main problems, we indicate some of these variants and of their applications.

In § 3 we apply Theorem A to power-series, and prove

Theorem B. *The necessary and sufficient conditions that* A *should be summable* (C) *are that* (1) *the function*

$$f(x) = \Sigma a_n x^n \tag{1.24}$$

should be regular and of finite order in the unit circle, i. e. that

$$|f(x)| < K(1 - |x|)^{-K} \qquad (|x| < 1), \tag{1.241}$$

tween the summability (C, r) of the Fourier series of a function $\varphi(t)$ and the summability $(C, r-1)$ of that of

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u)\, du.$$

Young does not, so far as we know, prove any of the theorems which we prove here, but it was from an examination of his work that our researches originated.

[5]) A. F. Andersen, Studier over Cesàros Summabilitetsmetode (Copenhagen 1921).

where the K's are independent of x; (2) there should be a number k such that if

$$(1.25)\quad f_1(x)=\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(x_1)\,dx_1,\quad f_2(x)=\frac{1}{1-x}\int_x^1 f_1(x_1)\,dx_1,\quad \ldots,$$

then

$$(1.26)\qquad f_k(x)\to A$$

when $x\to 1$ in any manner from within the circle.

The integrals which appear in the formulae (1.25) may be taken indifferently along the straight line $(x, 1)$ or the broken line $(x, 0)$, $(0, 1)$; and are to be regarded as elementary generalised integrals of the type

$$\lim_{\xi\to 1}\int_x^\xi,$$

where $\xi\to 1$ along whichever path of integration is chosen.

Theorem B 1. *If $f(x)$ is bounded in the circle, then A is either summable by every Cesàro mean of positive order, or summable by no Cesàro mean of any order. The necessary and sufficient condition that it should be summable is that $f_1(x)\to A$ when $x\to 1$ in any manner from within the circle.*

In § 4 we consider Fourier series. Using one of the trivial variants of Theorem A, we prove

Theorem C. *The necessary and sufficient condition that the Fourier series of an integrable function $f(t)$ should be summable (C), to sum A, for $t=x$, is that there should be a number k such that, if*

$$(1.271)\qquad \varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2A,$$

$$(1.272)\quad \varphi_1(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1,\quad \varphi_2(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi_1(t_1)\,dt,\quad \ldots$$

then

$$(1.28)\qquad \varphi_k(t)\to 0$$

when $t\to 0$.

It will appear later that this theorem has a dual interpretation; that the word "integrable" in the enunciation may be interpreted either as meaning "integrable (L)" or in a slightly more general sense; and that there is a similar ambiguity in regard to the integrals (1.272).

We may express our condition more concisely by saying that it is necessary and sufficient that $\varphi(t)$ should be *continuous in mean* for $t=0$. We prove Theorem C first on the assumption that the square of $f(t)$ is

summable, when the proof is simple. The general proof depends on more delicate considerations, and is decidedly more difficult than anything else in the memoir.

Finally we prove

Theorem C 1. *If $f(t)$ is bounded in an interval including $t=x$, then the Fourier series of $f(t)$, for $t=x$, is either summable by every Cesàro mean of positive order, or summable by no Cesàro mean of any order. The necessary and sufficient condition that it should be summable is that $\varphi_1(t)\to 0$ when $t\to 0$.*

This last theorem we enunciated without proof in a former memoir[6].

We must express our thanks to Mr. A. E. Ingham of Trinity College, Cambridge, for a number of valuable suggestions. We owe to him in particular the proof that it is indifferent, in Theorem B, which form of the definitions of the functions $f_s(x)$ is adopted, and the precise form of the functions $\psi_s(t)$ used in the proof of Theorem C.

We must also add a few words concerning the relation of our arithmetic theorem A to certain theorems of Knopp: for a fuller statement we may refer to Herr Knopp's note which follows this memoir. Knopp's theorem of 1917[6a], with $\lambda=1$, is equivalent to Theorem A when $r=1$, and is, we believe, the first theorem of this particular character. The generalisations which he has made of it are different in form, but are naturally equivalent in substance to our general theorem. The applications of this theorem which we make here show very clearly that theorems of this type are more important than might have been anticipated.

2. Proof of Theorem A.

2.1. Lemma 1. *If*

$$a_n=(n+1)(b_n-b_{n+1}) \tag{2.11}$$

then

$$A_n^r=(r+1)B_n^r-(n+1)B_{n+1}^{r-1} \qquad (r\geqq 0). \tag{2.12}$$

If $r=0$, B_{n+1}^{-1} is to be interpreted as meaning b_{n+1}.

[6] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Abel's Theorem and its converse, Proc. London Math. Soc. (2), **18** (1918), pp. 205–235 (p. 235, Theorem Z). We had already published a sketch of a proof, inferior to our present one: see "On the Fourier series of a bounded function", Proc. London Math. Soc. (2), **17** (Records of proceedings at meetings, 6. Dec. 1917).

[6a] K. Knopp, Über die Oszillationen einfach unbestimmter Reihen, Sitzungsberichte d. Berliner Math. Gesellschaft **16** (1917), S. 45–50. Later Hardy [A theorem concerning summable series, Proc. Camb. Phil. Soc. **20** (1920), pp. 304–307] proved a theorem, concerning the case $r=1$, $\lambda=1$, identical with Knopp's.

We can verify the result at once when $r = 0, 1$. Assuming it true for $r = s$, we have

$$A_n^{s+1} = (s+1)(B_0^s + B_1^s + \ldots + B_n^s) - B_1^{s-1} - 2B_2^{s-1} - \ldots - (n+1)B_{n+1}^{s-1}$$
$$= (s+2)B_n^{s+1} - (n+1)B_{n+1}^s,$$

and the conclusion is established by induction.

Lemma 2. *If B is summable $(C, r-1)$ then A is summable (C, r), and $A = B$.*

If $r = 0$, the result follows at once from (2.12), which may then be written

$$A_n = B_n - (n+1)b_{n+1}.$$

If $r > 0$, we have

$$B_{n+1}^{r-1} = C_{n+1}^{r-1} B + o(n^{r-1}),$$

and therefore, by summation

$$B_n^r = C_n^r B + o(n^r).$$

Hence, by (2.12),

$$A_n^r = ((r+1)C_n^r - (n+1)C_{n+1}^{r-1})B + o(n^r) = C_n^r B + o(n^r).$$

2.2. Lemma 3. *If A is summable (C, r), then*

$$B_n^{r-1} = h C_n^r + C_n^{r-1} A + o(n^{r-1}), \tag{2.21}$$

where h is a constant. When $r = 0$, the right hand side is to be interpreted as meaning

$$h + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

We may suppose without loss of generality that $A = 0$.[7] If $r = 0$,

$$(n+2)B_n - (n+1)B_{n+1} = B_n - (n+1)b_{n+1} = A_n = o(1),$$

$$\frac{B_n}{n+1} - \frac{B_{n+1}}{n+2} = \frac{A_n}{(n+2)(n+1)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Hence there is a constant h such that

$$\frac{B_n}{n+1} = h + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$b_{n+1} = \frac{B_n}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = h + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

which is (2.21). If $r > 0$,

$$(n+r+2)B_n^r - (n+1)B_{n+1}^r$$
$$= (r+1)B_n^r - (n+1)B_{n+1}^{r-1} = A_n^r = o(n^r). \tag{2.22}$$

[7] If we decrease b_0 by A we do the same to a_0 and leave the other a's unaltered, and A_n^{r-1}, B_n^{r-1} are each decreased by $C_n^{r-1} A$.

If we write

$$B_n^r = (n+r+1)(n+r)\dots(n+1)\varphi_n, \tag{2.23}$$

substitute in (2.22), and reduce, we obtain

$$(n+r+2)(n+r+1)\dots(n+1)(\varphi_n - \varphi_{n+1}) = A_n^r = o(n^r). \tag{2.24}$$

$$\varphi_n - \varphi_{n+1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{2.25}$$

Hence φ_n tends to a limit φ and

$$\varphi_n = \varphi + \sum_n^\infty \frac{A_\nu^r}{(\nu-r+2)\dots(\nu+1)} = \varphi + \sum_n^\infty o\left(\frac{1}{\nu^2}\right) = \varphi + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.26}$$

$$B_n^r = (n+r+1)(n+r)\dots(n+1)\varphi + o(n^r). \tag{2.27}$$

Substituting in (2.22), and dividing by $n+1$, we obtain

$$B_{n+1}^{r-1} = h\,C_{n+1}^r + o(n^{r-1}), \tag{2.28}$$

where

$$h = (r+1)!\,\varphi; \tag{2.281}$$

and this is (2.21) with $A = 0$ and $n+1$ in place of n.

2.3. Lemma 4. *The necessary and sufficient condition that A should be summable (C, r) is that (2.11) should have a solution b_n such that B is summable $(C, r-1)$.*

The condition is *sufficient*, by Lemma 2. To prove it *necessary*, take $A = 0$, and suppose that b_n is any solution of (2.11). All other solutions are of the form $\mathfrak{b}_n = b_n - \mathfrak{h}$, where $\mathfrak{h}$ is a constant. If we take $\mathfrak{h} = h$, we have

$$\mathfrak{B}_n^{r-1} = B_n^{r-1} - h\,C_n^r = o(n^{r-1}),$$

by (2.21), so that $\mathfrak{B}$ is summable $(C, r-1)$ to sum 0.

It is evident that only one b_n can satisfy the conditions.

Lemma 5. *If A is summable (C, r) then*

$$A' = \sum \frac{a_n}{n+1} \tag{2.31}$$

is summable $(C, r-1)$, and

$$A' = (r+1)! \sum_0^\infty \frac{A_n^r}{(n+r+2)\dots(n+1)}, \tag{2.32}$$

the latter series being absolutely convergent. And if

$$b_n = \sum_n^\infty \frac{a_\nu}{\nu+1} \quad (C, r-1), \tag{2.33}$$

then B is summable $(C, r-1)$, and $B = A$.

It follows from Lemma 4 that there is a solution of (2.11) such that $\mathfrak{B}$ is summable $(C, r-1)$. But then $\sum'(\mathfrak{b}_n - \mathfrak{b}_{n+1})$ is also summable $(C, r-1)$, to sum $\mathfrak{b}_0$, *i. e.* A' is summable $(C, r-1)$ to sum $\mathfrak{b}_0$.

Hence b_n exists, and it is plainly a solution of (2.11), so that $b_n = \mathfrak{b}_n + \mathfrak{h}$, where $\mathfrak{h}$ is a constant. But $b_n \to 0\,(C, r-1)$, from its definition; and $\mathfrak{b}_n \to 0\ (C, r-1)$, because $\mathfrak{B}$ is summable $(C, r-1)$. Hence $\mathfrak{h} = 0$, $b_n = \mathfrak{b}_n$, and B is summable $(C, r-1)$.

Finally, the h and φ of Lemma 3 are now zero, and

$$A' = b_0 = B_0^r = (r+1)!\,\varphi_0 = (r+1)!\,\sum_0^\infty{}' \frac{A_n^r}{(n+r+2)\ldots(n+1)},$$

by (2.26). This last result is of course well known.[8])

Lemma 5 shows that the particular solution of (2.11), referred to in Lemma 4, is given by (2.33). This is what is required for our immediate purpose; but we insert two additional lemmas for the sake of completeness.

Lemma 6. *If A' is summable $(C, r-1)$, b_n is defined by (2.33), and B is summable $(C, r-1)$, then A is summable (C, r).*

Lemma 7. *The necessary and sufficient condition that A should be summable (C, r) is that, if b_n is defined by (2.33), B should be summable $(C, r-1)$,*

Lemma 6 is a corollary of Lemma 2, since b_n satisfies (2.11), and Lemma 7 results from the combination of Lemmas 5 and 6.

2.4. The preceding lemmas contain the proof of Theorem A. Suppose first that A_{r+1} is summable $(C, -1)$. Applying Lemma 2 repeatedly, we see that A_s is summable $(C, r-s)$ for $s = r, r-1, \ldots, 0$. Similarly, if A is summable (C, r), we see, by applying Lemma 4 repeatedly, that numbers $a_{n,s}$ exist such that A_s is summable $(C, r-s)$ for $s = 1, 2, \ldots, r+1$. Finally it follows, from Lemma 5, that these numbers are connected by (1.23).

It is instructive to recapitulate the properties of summable series which we have assumed in the preceding argument. We have assumed only that, if A is summable (C, r), then

$$(1) \qquad a_n \to 0 \quad (C, r),$$

$$(2) \qquad a_n + a_{n+1} + \ldots = A - A_{n-1} \to 0 \quad (C, r),$$

$$(3) \qquad \sum'(a_n - a_{n+1}) = a_0 \quad (C, r),$$

[8]) H. Bohr, Sur la série de Dirichlet, Comptes Rendus, 11 Jan. 1909; M. Riesz, Sur les séries de Dirichlet, *ibid.*, 15 July 1909. See also Bohr's dissertation "Bidrag til de Dirichlet'ske Raekkers Theori" (Copenhagen, 1910).

(4) a change in one term of A will affect its sum in the obvious manner,

(5) the addition of a constant (other than 0) to each of its terms will destroy its summability.

All these properties are quite trivial deductions from the definitions.

2.5. We have proved Theorem A in the form most convenient for applications to *power-series*. For *Fourier series*, a slightly different form is preferable.

Theorem A1. *Theorem A remains true if* (1.22) *is replaced by*

$$\begin{aligned} a_{0,s} &= a_0 = 0, & a_{n,0} &= a_n \ (n>0), \\ a_{n,s-1} &= n(a_{n,s} - a_{n+1,s}) & (n>0,\ s>0), \end{aligned} \tag{2.51}$$

and (1.23) *by*

$$a_{n,s} = \sum_n^x \frac{a_{\nu,s-1}}{\nu} \quad (C, r-s). \tag{2.52}$$

This amounts to little more than a restatement of Theorem A in a slightly different notation. If, in (2.51), we write $\alpha_{n-1,s}$ for $a_{n,s}$, then A_s is replaced by

$$A_s = 0 + \alpha_{0,s} + \alpha_{1,s} + \dots,$$

and the relations between the α's are those of Theorem A. Hence Theorem A1 is a corollary of Theorem A; but we must add a sixth to the propositions (1)—(5) of § 2.4, viz.

(6) the summability and sum of the series are not affected by inserting or deleting a zero term at the beginning.

2.6. Theorem A provides a very powerful weapon in the general theory of summable series, and the following examples of its application to the proof of known theorems are perhaps worthy of notice.

(1) *If A is summable (C, r), and $na_n \to 0$, then A is convergent.* For

$$a_{n,1} = \sum_n^x \frac{a_\nu}{\nu+1} = \sum_n^\infty o\left(\frac{1}{\nu^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right);$$

and similarly $a_{n,s} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ for every s. Hence A_r is summable $(C, -1)$, and therefore A is summable $(C, r-1)$. Repeating the argument r times, A is convergent (and so, naturally, summable $(C, -1)$).

(2) *If A is summable (C, r), and*

$$t_n = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = o(n),$$

then A is convergent.

For

$$\sum_n^N \frac{a_\nu}{\nu+1} = \sum_n^N \frac{t_\nu - t_{\nu-1}}{(\nu+1)\nu} = 2\sum_n^{N-1} \frac{t_\nu}{(\nu+2)(\nu+1)\nu} - \frac{t_{n-1}}{(n+1)n} + \frac{t_N}{(N+1)N}.$$

Making $N \to \infty$, we obtain

$$a_{n,1} = 2\sum_n^\infty \frac{t_\nu}{(\nu+2)(\nu+1)\nu} - \frac{t_{n-1}}{(n+1)n} = \sum_n^\infty o\left(\frac{1}{\nu^2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Hence A_1 is summable $(C, -1)$, by (1); and therefore A is convergent.

(3) *If A is summable (C, r), and*

$$\sum n^p |a_n|^{p+1} \qquad (p \geqq 0)$$

is convergent, then A is convergent.

The conclusion is trivial if $p = 0$. If $p > 0$, we have

$$a_{n,1} = \sum_n^\infty \frac{a_\nu}{\nu+1} = \sum_n^\infty \left((\nu+1)^{-\frac{2p+1}{p+1}} \cdot (\nu+1)^{\frac{p}{p+1}} a_\nu\right)$$

$$= O\left(\left(\sum_n^\infty \nu^{-\frac{2p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\sum_n^\infty \nu^p |a_\nu|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right) = O\left(\left(n^{-\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right) o(1) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Hence A_1 is summable $(C, -1)$, and therefore A is convergent.

(4) If A is summable (C, r), and $a_n > -\frac{K}{n}$, where K is a constant, we can prove, as in (1) above, that $a_{n,1}$, $a_{n,2}$, ... satisfy the same condition as a_n. We thus reduce the proof of the theorem "*if A is summable (C, r), and $a_n > -\frac{K}{n}$, then A is convergent*" to its proof in the special case when $r = 1$. Of this a considerable number of proofs have been given: it does not seem to be possible to simplify them materially by use of Theorem A.[8a])

(5) There are theorems similar to Theorem A (and its attendant lemmas) but concerned with summation by Hölder's means. These theorems are of interest because, when combined with Theorem A, they lead to a new proof of the equivalence of the two methods of summation.

Write

$$\mathfrak{A}_n^0 = A_n, \qquad \mathfrak{A}_n^1 = \frac{\mathfrak{A}_0^0 + \ldots + \mathfrak{A}_n^0}{n+1}, \qquad \mathfrak{A}_n^2 = \frac{\mathfrak{A}_0^1 + \ldots + \mathfrak{A}_n^1}{n+1}, \ldots.$$

Then A is *summable (H, r)* if $\mathfrak{A}_n^r \to A$. If we suppose that

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad a_{n+1} = n(b_n - b_{n+1}) \qquad (n \geqq 0), \tag{2.61}$$

[8a]) See however the following note of Herr Knopp.

we find without difficulty that[9])

$$\mathfrak{A}_n^0 = \mathfrak{B}_n^0 - n b_n, \quad \mathfrak{A}_n^r = 2\mathfrak{B}_n^r - \mathfrak{B}_n^{r-1} \qquad (r \geqq 1). \tag{2.62}$$

Following the lines of §§ 2.1 — 2.3, we prove that *the necessary and sufficient condition that A should be summable (H, r) is that there should be a solution b_n of (2.61) such that B is summable $(H, r-1)$, and that this solution is given by*

$$b_0 = 0, \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{n} + \frac{a_{n+2}}{n+1} + \ldots \quad ((H, r-1),\ n > 0). \tag{2.63}$$

The equivalence theorem follows from a combination of this proposition with Lemma 7. Let us suppose that the theorem is true for means of order r. Then

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = A \qquad (H, r+1) \tag{2.64}$$

is equivalent to

$$0 + 0 + a_2 + a_3 + \ldots = A - a_0 - a_1 \quad (H, r+1),$$

and therefore to

$$0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = A - a_0 - a_1 \qquad (H, r),$$

where

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{n} + \frac{a_{n+2}}{n+1} + \ldots \qquad (H, r)$$

for $n > 0$. In the last two equations, H may be replaced by C. If now we write

$$a_n = a'_{n-2}\ (n > 1), \quad b_n = b'_{n-1} \qquad (n > 0),$$

we have

$$b'_n = \frac{a'_n}{n+1} + \frac{a'_{n+1}}{n+2} + \ldots \qquad (C, r).$$

Thus (2.64) is equivalent to

$$b'_0 + b'_1 + b'_2 + b'_3 + \ldots = A - a_0 - a_1 \qquad (C, r),$$

and therefore to

$$a'_0 + a'_1 + a'_2 + a'_3 + \ldots = A - a_0 - a_1 \qquad (C, r+1),$$

or to

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = A \qquad (C, r+1). \tag{2.65}$$

The equivalence theorem is thus established by induction.

3. Proof of Theorem B.

3.1. We consider now the power-series (1.24). We may obviously suppose that the unit circle is the circle of convergence, the theorem being otherwise trivial.

---

[9]) Equations equivalent to these are given by Young in the second memoir quoted in [4]).

The condition (1.241) is equivalent to

$$a_n = O(n^K) \tag{3.11}$$

for some K. For if $a_n = O(n^H)$ then

$$f(x) = O(\Sigma n^H |x|^n) = O(1-|x|)^{-H-1};$$

and if $f(x) = O(1-|x|)^{-H}$ then

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx = O(n^H),$$

on integrating round the circle $|x| = 1 - \frac{1}{n}$.

3.2. (1) We prove first that the conditions are *necessary*; and this is obvious so far as (3.11), or (1.241), is concerned.

Suppose that A is summable (C, r), and that $A_1, \ldots$ are defined as in Theorem A. If $|x|<1$, we have

$$\sum \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = \sum (a_{n,1} - a_{n+1,1})x^{n+1} = a_{0,1} - (1-x)\sum a_{n,1}x^n,$$

and therefore

$$\varphi_1(x) = \sum a_{n,1}x^n = \frac{1}{1-x}\left(a_{0,1} - \sum \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right) \tag{3.21}$$

$$= \frac{1}{1-x}\sum \frac{a_n}{n+1}(1-x^{n+1}) \quad (C, r-1),$$

since $\sum \frac{a_n}{n+1}$ is summable $(C, r-1)$. But

$$\sum \frac{a_n}{n+1}(1-x^{n+1}) = \lim_{\xi \to 1} \sum \frac{a_n}{n+1}(\xi^{n+1} - x^{n+1}) \tag{3.22}$$

$$= \lim_{\xi \to 1} \int_x^\xi f(x_1)\,dx_1 = \int_x^1 f(x_1)\,dx_1,$$

the path of integration being either of those contemplated in the enunciation of Theorem B, and ξ tending to 1 along it[10]).

From (3.21) and (3.22) we deduce

$$\varphi_1(x) = \sum a_{n,1}x^n = \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(x_1)\,dx_1 = f_1(x). \tag{3.23}$$

Similarly

$$\Sigma a_{n,s}x^n = f_s(x). \tag{3.24}$$

[10]) When A is summable, $f(x)$ is continuous in any domain interior to the circle and bounded near 1 by two chords of the circle, and Cauchy's Theorem is valid for the triangle $(x, 0, 1)$. It is therefore indifferent in which way $f_1(x)$, or any of the succeeding functions, is defined. In the second half of the proof, where we have to prove our condition *sufficient*, this point will demand more careful consideration.

Take now $s = r+1$. Then A_{r+1} is summable $(C, -1)$, to sum A, and therefore, by a known theorem,

$$f_{r+2}(x) \to A$$

when $x \to 1$ in any manner from within the circle.

The theorem which we use here is this: *if* $A = \Sigma a_n$ *is convergent, and* $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, *then*

$$(3.25) \qquad F(x) = \frac{1}{1-x}\sum \frac{a_n}{n+1}(1-x^{n+1}) = \frac{1}{1-x}\int_x^1 \sum a_n x_1^n \, dx_1$$

$$= \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(x_1)\, dx_1 \to A,$$

when $x \to 1$. We insert a proof of this theorem, since it has not been published, in its simplest form, before[11]).

In the first place, since $\sum \frac{a_n}{n+1}$ is absolutely convergent, the two forms of $F(x)$ in (3.25) are equivalent. Next

$$(3.26) \qquad F(x) = \frac{1}{1-x}\sum_{n \leqq N} + \frac{1}{1-x}\sum_{n>N} = F_1 + F_2,$$

where

$$(3.261) \qquad N = \left[\frac{1}{|1-x|}\right].$$

But

$$1 - x^{n+1} = (n+1)(1-x) + O(n^2|1-x|^2),$$

and therefore

$$(3.27) \qquad F_1 = \sum_{n \leqq N} a_n + O\Big(|1-x|\sum_{n \leqq N} o(1)\Big)$$

$$= A + o(1) + o(N|1-x|) = A + o(1);$$

while

$$(3.28) \qquad F_2 = O\Big(\frac{1}{|1-x|}\sum_{n>N} o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) = o\Big(\frac{1}{N|1-x|}\Big) = o(1).$$

From (3.26) — (3.28) we deduce (3.25). The conditions of Theorem B are therefore *necessary*.

3.3. (2) It remains to prove that the conditions are sufficient.

---

[11]) The theorem was first stated, but without proof, in our memoir "Contributions to the arithmetic theory of series", Proc. London Math. Soc. (2), **11** (1912), pp. 411—478 (478, Theorem 50). The proof of the correlative "Tauberian" theorem is given there, and also in Landau's *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (1916), pp. 43—45. In our later memoir referred to in [6]), the theorem appears as a special case of a more difficult theorem.

We must consider first the question of the equivalence of the two definitions of the functions $f_s(x)$. If $f_1(x)$ is defined by the broken line, then plainly

$$(1-x)f_1(x) = C - \sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \int_0^1 f(x)\,dx - \mathfrak{f}(x),$$

say, the existence of the integral, as $\lim_{\xi \to 1} \int_0^\xi$, being implied in our definition; and it is evident that $f_1(x)$ is regular for $|x| < 1$. But if $f_1(x)$ is defined by the line $(x, 1)$, it is not evident that $f_1(x)$ is an analytic function, and in fact this is not true without some restriction.

The *existence* of $f_1(x)$, for every x, means that $\mathfrak{f}(\xi)$ tends to a limit L when $\xi \to 1$ along any chord of the circle, in which case

$$(1-x)f_1(x) = L - \mathfrak{f}(x).$$

Here L is *prima facie* a function (not generally analytic) of x, so that f_1 is not necessarily analytic. It is sufficient, for f_1 to be analytic, that L *should be independent of* x; and this is true, but *only in virtue of the condition that* $a_n = O(n^K)$. Consider a region D, interior to the circle, and bounded near 1 by two chords of the circle; let L_1 and L_2 be the values of L corresponding to the two chords bounding D; and let D' be a slightly smaller region of the same type, interior to D. Then $\mathfrak{f}(x) = O(|1-x|^{-K})$ in D, and $\mathfrak{f} = L_1 + o(1)$, $\mathfrak{f} = L_2 + o(1)$ on the two sides of D; from which it follows, by well known theorems of Phragmén, Lindelöf, and Montel[12]), that $L_2 = L_1$ and that $\mathfrak{f} \to L_1$ uniformly in D'. Hence L is independent of x, and f_1 is analytic. We can now apply Cauchy's Theorem to the triangle $(x, 0, 1)$, and it appears that the two definitions of f_1 are equivalent. It is plain, moreover, that the same argument can be applied to the succeding functions $f_2, f_3, \ldots$.

Returning to our main argument, we observe first that it is enough to prove that *if* (3.11) *is satisfied, and* $f(x) \to A$, *then* A *is summable.* For suppose that this is established, and that what we are actually given is that

$$f_r(x) \to A.$$

Then the functions $f_s(x)$ are regular for $|x| < 1$, so that

$$f_s(x) = \Sigma a_{n,s} x^n,$$

[12]) E. Phragmén and E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse, Acta Mathematica **31** (1908), pp. 381–406; E. Lindelöf, Sur un principe général de l'analyse, Acta Societatis Fennicae **46**, no. 4 (1915), pp. 1–35 (7); P. Montel, Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (3), **29** (1912), pp. 487–535 (519). See also p. 218 of our memoir referred to in [6]).

say, for $|x|<1$. Also

$$f_{s-1}(x) = -\frac{d}{dx}((1-x)f_s(x)),$$

from which it follows that the numbers $a_{n,s}$ are related in the manner prescribed in Theorem A. But A_r is summable, and therefore A is summable, by Theorem A.

We may suppose then, without loss of generality, that $f(x)\to A$; and we may also suppose that $A=0$, so that $f(x)=o(1)$. This being so, we write

$$(3.31)\qquad F_1(x)=\int_x^1 f(x_1)\,dx_1, \qquad F_2(x)=\int_x^1 F_1(x_1)\,dx_1, \ldots.$$

the integrals being now rectilinear; and plainly we have

$$(3.32)\qquad F_h(x)=o(|1-x|^h)$$

for every h. Further, if $|x|<1$, we have

$$F_1(x)=C-\sum \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \qquad F_2(x)=-Cx+D+\sum \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}x^{n+2},$$

and generally

$$(3.33)\qquad F_h(x)=P_{h-1}(x)+(-1)^h\sum \frac{a_n}{(n+h)\ldots(n+1)}x^{n+h},$$

where $P_{h-1}(x)$ is a polynomial of degree $h-1$. If h is large enough (*e.g.* if $h=K+2$) then the series is absolutely and uniformly convergent for $|x|\leqq 1$, and

$$(3.34)\qquad |F_h(x)|=O(1) \qquad (|x|<1).$$

Suppose that

$$(3.35)\qquad r=h+1=K+3.$$

Then

$$(3.36)\qquad \frac{A_n^r}{C_n^r}=\frac{1}{2\pi i\,C_n^r}\int \frac{f(x)}{(1-x)^{r+1}}\,\frac{dx}{x^{n+1}},$$

the contour of integration being the circle $|x|=1-\frac{1}{n}$. Integrating h times by parts, we find

$$(3.361)\qquad \frac{A_n^r}{C_n^r}=\frac{1}{2\pi i\,C_n^r}\int F_h(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^h\left(\frac{1}{(1-x)^{r+1}x^{n+1}}\right)dx.$$

If we develop the right hand side by Leibniz' Theorem, we obtain

$$(3.362)\qquad \frac{A_n^r}{C_n^r}=\sum_{\lambda+\mu=h} I_{\lambda,\mu},$$

where

$$(3.363)\qquad I_{\lambda,\mu} = O(n^{\mu-r})\int F_h(x)(1-x)^{-r-1-\lambda}x^{-n-1-\mu}\,dx,$$

the constants of the O's depending only on K.

We divide the contour of integration into two parts, C_1 (for which $|\arg x| \leqq \delta$), and C_2, and $I_{\lambda,\mu}$ into two corresponding parts $I_{\lambda,\mu,1}$ and $I_{\lambda,\mu,2}$, so that

$$(3.364)\qquad I_{\lambda,\mu} = I_{\lambda,\mu,1} + I_{\lambda,\mu,2}.$$

Given $\varepsilon > 0$ we can, by (3.32), choose δ so that

$$|F_h(x)| < \varepsilon\,|1-x|^h$$

on C_1. Also $|x|^{-n-1-\mu} = O(1)$ on C_1. We have therefore

$$|I_{\lambda,\mu,1}| < H\varepsilon n^{\mu-r}\int_0^{\delta} \frac{d\theta}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^{\frac{1}{2}(r+1+\lambda-h)}},$$

where $\varrho = 1-\frac{1}{n}$ and H depends only on K, so that

$$(3.37)\qquad |I_{\lambda,\mu,1}| < H\varepsilon n^{\mu-r}\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{\left(\frac{1}{n^2}+\theta^2\right)^{\frac{1}{2}(r+1+\lambda-h)}}$$

$$< H\varepsilon n^{\mu-r}\cdot n^{r+\lambda-h} < H\varepsilon n^{\lambda+\mu-h} = H\varepsilon.$$

When δ has been fixed we have, on C_2,

$$F_h(x) = O(1),\qquad |1-x|^{-1} = O(1),\qquad |x|^{-n-1-\mu} = O(1),$$

and therefore

$$(3.38)\qquad I_{\lambda,\mu,2} = O(n^{\mu-r}) = o(1),$$

since $\mu \leqq h < r$. Finally, from (3.362), (3.364), (3.37) and (3.38) we derive

$$\left|\frac{A_n^r}{C_n^r}\right| = \left|\sum_{\lambda+\mu=h}(H\varepsilon+o(1))\right| < H\varepsilon+o(1) < H\varepsilon,$$

if n is sufficiently large. Hence A is summable (C, r) to sum 0. This completes the proof of Theorem B.

Proof of Theorem B1.

3.4. An interesting particular case is that in which $f(x)$ is *bounded* in the unit circle. In this case it is essential to take account of non-integral orders of summability, and we shall assume a good deal more of the general theory than has been necessary hitherto.

Theorem B 1 is the analogue for power-series of a theorem for Fourier series stated without proof[12a]) in our memoir referred to in [6]). The first part of it is not new, being contained in Andersen's dissertation[13]). Andersen, however, gives a different necessary and sufficient condition for summability, viz. that $f(x) \to A$ when $x \to 1$ by real values. In this case the necessity of the condition is trivial, though not its sufficiency.

3.5. We require two additional lemmas.

Lemma 8. *If $f(x)$ is bounded and $f_r(x) \to A$ when $x \to 1$ by real values, then $f_s(x) \to A$ for $s = 1, 2, \ldots, r$.*[14])

We may suppose, without loss of generality, that $f(x)$ is real and $A = 0$. If we write $x = 1 - y$, $f(x) = g(y)$, so that $y \to 0$, we have

$$g_1(y) = \frac{1}{y}\int_0^y g(y_1)\,dy_1, \quad g_2(y) = \frac{1}{y}\int_0^y g_1(y_1)\,dy_1, \quad \ldots, \quad g_r(y) = o(1).$$

It is enough to prove the lemma when $r = 2$. For suppose it proved in this case. Then all of the functions $g_s(y)$ are bounded, so that $g_{r-2} = O(1)$, $g_r = o(1)$, and therefore $g_{r-1} = o(1)$. Repeating the argument, we obtain the lemma in its general form.

Supposing then $r = 2$, we have

$$\int_0^y g_1(y_1)\,dy_1 = y g_2(y) = o(y);$$

and so, if δ is fixed and $0 < \delta < 1$,

$$\int_y^{y+\delta y} g_1(y_1)\,dy_1 = o(y),$$

$$\delta y g_1(y + \theta\delta y) = o(y), \tag{3.51}$$

where $0 < \theta < 1$. But

$$g_1(y + \theta\delta y) - g_1(y) = \theta\delta y\, g_1'(y + \theta\theta_1\delta y),$$

where $0 < \theta_1 < 1$, and

$$g_1'(y) = \frac{g(y)}{y} - \frac{1}{y^2}\int_0^y g(y_1)\,dy_1 = O\left(\frac{1}{y}\right);$$

so that

$$g_1(y + \theta\delta y) = g_1(y) + \delta\, O(1).$$

[12a]) Theorem Z, p. 235.

[13]) A. F. Andersen, *l. c.*, p. 93 (Saetning X). The same theorem was stated to us by O. Szász in a letter dated 28 Oct. 1919.

[14]) There is of course nothing essentially new in this lemma, which belongs to a class which we have used repeatedly before; but it is not actually included in any previous theorem that we can quote.

Hence, by (3.51),

$$g_1(y) = \delta O(1) + \frac{1}{\delta} o(1). \tag{3.52}$$

From (3.52) it follows (by choice first of δ and then of y) that $g_1(y) \to 0$, which proves the lemma.

Lemma 9. *If $f(x)$ is bounded for $|x| < 1$, and $f_r(x) \to A$ when $x \to 1$ in any manner from within the circle, then $f_s(x) \to A$ for $s = 1, 2, \ldots, r$.*

Write

$$x = 1 - ye^{i\varphi} \quad \left(0 < y < 1, -\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi\right),$$

$$f(x) = f(1 - ye^{i\varphi}) = g(y, \varphi) + ih(y, \varphi),$$

$$f_1(x) = g_1(y, \varphi) + ih_1(y, \varphi),$$

and so on, $g_1, g_2, \ldots$, for example, being formed from g as in the proof of Lemma 8. All the g's are bounded in the two variables y, φ; and $g_r = o(1)$, uniformly in φ. Repeating with these glosses the arguments used before, we find that $g_s = o(1)$ uniformly in φ. Similarly $h_s = o(1)$, which proves the lemma.

3.6. It is now easy to prove Theorem B 1. In the first place, every Cesàro mean of A_n of positive order, is bounded[15]. Hence[16], if A is summable by any mean, it is summable by every mean of positive order. This proves the first part of the theorem.

If $f_1(x) \to A$, A is summable, by Theorem B, and therefore summable (C, δ) for every positive δ. The condition is therefore *sufficient*. If, on the other hand, A is summable, $f_r(x) \to A$, for some r, by Theorem B; and therefore $f_1(x) \to A$, by Lemma 9. The condition is therefore *necessary*.

The conditions of Theorem B 1 are unnecessarily narrow. It should be enough to suppose (i) that $f(x)$ is bounded in an angle $|\arg x| \leqq \delta$ and (ii) that

$$\int_0^{2\pi} |f(|x|e^{i\theta})|\, d\theta$$

is bounded[17]; but we have not worked out a detailed proof.

[15]) E. Landau, Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (III), Archiv der Math. u. Physik (3), **21** (1916), pp. 250–260, and *Darstellung u. s. w.*, pp. 17–19; A. F. Andersen, l. c., pp. 91–93 (Saetning IX).

[16]) A. F. Andersen, l. c., pp. 56–59 (Saetning VII). A less complete theorem was proved by Doetsch (G. Doetsch, Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen, Math. Zeitschrift **11** (1921), 161–179.)

[17]) Compare Theorem C 1 (§ 4).

4. Proof of Theorem C.

4.1. We proceed, taking now Theorem A 1 as our basis, to discuss the summability of the Fourier series, for $t = x$, of a periodic and integrable function $f(t)$. It is convenient to make certain preliminary simplifications.

The Fourier series of $f(t)$ for $t = x$ is, save for the constant term and a factor $\frac{1}{2}$, that of $\varphi(t)$ for $t = 0$. We may therefore confine our attention to even functions, and to the special value $t = 0$; and we may suppose that $A = 0$. We may also suppose that $a_0 = 0$, so that

$$\varphi(t) \sim a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots . \tag{4.11}$$

We shall find it convenient to introduce the auxiliary functions

$$\psi_0 = \varphi_0 = \varphi, \qquad \psi_1 = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t \int_0^t \psi_0(t_1)\,dt_1 + \gamma_1 \sin^2\frac{1}{2}t, \tag{4.12}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t \int_0^t \psi_1(t_1)\,dt_1 + \gamma_2 \sin^2\frac{1}{2}t, \dots,$$

where the γ's are constants whose values will be fixed in a moment. It may be verified at once that, if any one of these functions ψ_r exists, then so does the corresponding φ_r, and conversely, and that the difference between φ_r and ψ_r is in fact $o(t)$. To prove this we need only observe (i) that it is obvious when $r = 0$, and (ii) that, if it is true when $r = m$, then

$$\psi_{m+1} = \Big(\frac{1}{t} + O(t)\Big)\int_0^t (\varphi_m(t_1) + o(t_1))\,dt_1 + o(t_1) \qquad \varphi_{m+1} + o(t).$$ [18])

In proving Theorem C, then, we may replace every φ by the corresponding ψ.

4.2. We suppose first that φ^2 is integrable, in which case the proof is greatly simplified. Substantially the same proof is valid if we suppose only that $|\varphi|^{1+\delta}$, where $\delta > 0$, is integrable.

Lemma 10. *If φ^2 is integrable, then φ_r^2 and ψ_r^2 are integrable.*

[18]) It is important to observe that this proof holds even when some or all of the functions are not integrable (L). It is enough that they should be integrable in any sense which makes the integral a continuous function of its upper limit, and, in particular, enough that they should possess integrals of the type

$$\int_0^a F(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^a F(t)\,dt$$

(elementary non-absolutely convergent integrals).

It is plainly sufficient to prove that φ_1^2 is integrable, *i.e.* that $\int_\varepsilon^\delta \varphi_1^2\,dt$ is bounded when $\varepsilon \to 0$. But, if

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1,$$

we have

$$\Phi_1^2 \leqq t\int_0^t \varphi^2\,dt_1 = o(t)$$

and so

$$\int_\varepsilon^\delta \varphi_1^2\,dt = \int_\varepsilon^\delta \frac{\Phi_1^2}{t^2}\,dt - \frac{(\Phi_1(\varepsilon))^2}{\varepsilon} - \frac{(\Phi_1(\delta))^2}{\delta} + 2\int_\varepsilon^\delta \varphi_1\varphi\,dt$$

$$= o(1) + O(1) + O\left(\sqrt{\int_\varepsilon^\delta \varphi_1^2\,dt}\right),$$

which is impossible unless the left hand side is bounded[19]).

All that we shall use in the argument which follows is that φ_r and ψ_r are integrable (L).

4.31. The function ψ_1 is even and periodic, since

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_0(t)\,dt = 0.$$

Since $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{1}{2}t\,dt = \pi$, we can choose γ_1 so that

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t)\,dt = 0,$$

and ψ_1 then fulfils all the relevant conditions fulfilled by ψ_0. Proceeding in this manner, we can determine the constants $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ successively so that

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_s(t)\,dt = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots),$$

and we may write

$$(4.311) \qquad \psi_s(t) \sim a_1^s \cos t + a_2^s \cos 2t + \ldots.$$

[19]) The proof of Lemma 10 is an adaptation of M. Riesz's proof of the corresponding theorem for infinite series. See G. H. Hardy, Note on a theorem of Hilbert, Math. Zeitschrift 6 (1920), pp. 314—317.

We have now

$$\sum_n^N \frac{a_\nu}{\nu} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_n^N \frac{\cos \nu t}{\nu}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(t) \sum_n^N \sin \nu t\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)t - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t}\, \Phi_1(t)\, dt$$

$$\to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(t) \cot \tfrac{1}{2}t \cos nt\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(t) \sin nt\, dt,$$

when $N \to \infty$, since $\Phi_1(t) \cot \frac{1}{2}t$ is integrable. Hence[20])

$$a_{n,1} = a_n^1 + b_{n,1} = a_n^1 + b'_{n,1} + b''_{n,1}, \tag{4.312}$$

where

$$b'_{n,1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(t) \sin nt\, dt, \quad b''_{n,1} = -\frac{\gamma_1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \tfrac{1}{2}t \cos nt\, dt, \tag{4.313}$$

so that $b''_{n,1}$ is $\frac{1}{2}\gamma_1$ if $n = 1$ and zero if $n > 1$.

4.32. The series $\Sigma b''_{n,1}$ is plainly convergent to sum $\frac{1}{2}\gamma_1$. Further,

$$\sum_1^N b'_{n,1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t}\, \Phi_1(t)\, dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2}t\, \Phi_1(t)\, dt \tag{4.321}$$

when $N \to \infty$. Hence $\Sigma b_{n,1}$ is convergent, to sum

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2}t\, \Phi_1(t)\, dt + \frac{1}{2}\gamma_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t)\, dt = 0.$$

Also $b'_{n,1}$, being the Fourier sine coefficient of an integral, is $o\left(\frac{1}{n}\right)$, and therefore $b_{n,1}$ is of the same form. In other words, $\Sigma b_{n,1}$ is summable $(C, -1)$ to sum zero; and we have proved that $a_{n,1}$ *differs from* a_n^1 *by the general term of a series* B_1, *summable* $(C, -1)$ *to sum* 0.

As ψ_1 possesses all the relevant properties of ψ_0, we may repeat the argument. The series $B_2, B_3, \ldots$, formed from B_1 as $A_2, A_3, \ldots$ are formed from A_1, are all summable $(C, -1)$, to sum 0, and so are all

[20]) In the notation of Theorem A 1.

other series of similar type introduced in the argument[21]). We thus obtain

Lemma 11. *If φ^2 is integrable then $a_{n,s}$ differs from the Fourier coefficient of ψ_s by the general term of a series summable $(C,-1)$ to sum 0.*

4.4. We next recall a known theorem.

Lemma 12. *If $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, then the necessary and sufficient condition that A should be convergent is that $\varphi_1 \to A$.*

This result is due to Fatou[22]). We have generalised it, replacing the o by O, but this generalisation is not needed here.

There is now no difficulty in proving Theorem C (when φ^2 is integrable). We suppose $A = 0$. The condition is *necessary*; for, if A is summable (C,r) to sum 0, A_{r+1} is summable $(C,-1)$ to sum 0, by Theorem A 1; A^{r+1} is summable $(C,-1)$ to sum 0, by Lemma 11; and therefore ψ_{r+1}, or φ_{r+1}, tends to 0, by Lemma 12. The condition is *sufficient*; for, if φ_r, or ψ_r, tends to 0, A^r is summable $(C,1)$ to sum 0, by Fejér's theorem; A_r is summable $(C,1)$ to sum 0, by Lemma 11; and therefore A is summable $(C,r+1)$ to sum 0, by Theorem A 1.

4.5. We have still to prove the theorem in the general case. The proof follows the same lines, but more delicate considerations are required. The difficulty is an obvious one. The integrability (L) of φ does not necessarily imply that of φ_1, as may be seen from the trivial example in which

$$\varphi = \frac{1}{t(\log t)^{\frac{1}{2}}};$$

here φ_1 exists, but is not integrable down to 0, and $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ have no meaning.

We begin by proving the *sufficiency* of our condition, which is comparatively easy. A word of preliminary explanation is required. Our condition asserts that some one of the functions $\varphi, \varphi_1, \ldots$, say φ_r, is continuous for $t = 0$, and this obviously implies the existence, in some sense, of all of $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$. If the integrals which define these functions are Lebesgue integrals, *i. e.* if all the φ's are integrable (L), then there is nothing more to prove, the proof of §§ 4.3—4.4 being valid as it

[21]) Thus $a_{n,2}$ differs from a_n^2 by (1) a term $b_{n,2}$ derived from $b_{n,1}$ as $a_{n,2}$ is from $a_{n,1}$ and (2) a term $c_{n,2}$ arising in the same manner as $b_{n,1}$. At the next stage the difference arises from three terms $b_{n,3}$, $c_{n,3}$, $d_{n,3}$; and so on. The series thus arising have all the same property.

[22]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mathematica **30** (1906), pp. 335—400. See also pp. 228 *et seq.* of our memoir quoted in [6]).

stands. It will appear, however, that we are in any case compelled to consider integrals of a more general type, viz. "elementary generalised integrals"

$$\int_0^a F(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^a F(t)\,dt,$$

where the integral on the right is a Lebesgue integral but that on the left is not. If the integrals which define the φ's are of this type, our argument requires reconsideration.

We call an integral of this type a "Cauchy" integral, and say that its integrand is integrable (C). It is to be understood that our integrals are "generalised" only in respect to the point $t = 0$.

4.6. Lemma 13. *If φ is integrable (L), $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r-1}$ are integrable* (C), *and φ_r is continuous for $t = 0$, then $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ are integrable (L).*

It is convenient to make the transformations

$$t = e^{-x}, \quad F(x) = e^{-x}\varphi(t), \quad F_1(x) = e^{-x}\varphi_1(t), \quad \ldots .$$

Our data are then (i) that the integrals

$$\int_x^\infty |F(y)|\,dy, \quad F_1(x) = \int_x^\infty F(y)\,dy, \quad F_2(x) = \int_x^\infty F_1(y)\,dy, \quad \ldots$$

exist (as Cauchy integrals up to ∞), and (ii) that

$$F_r(x) = \int_x^\infty F_{r-1}(y)\,dy = o(e^{-x})$$

and our conclusion is to be that $\int_x^\infty |F_s(y)|\,dy$ exists for $s = 1, 2, \ldots, r$. We shall in fact assume only that $F_r(x) = O(e^{-ax})$, a being a positive constant.

The functions $F_s(x)$ are continuous, and tend to zero when $x \to \infty$, in virtue of their definition, and there is no loss of generality in supposing that $|F_s(x)| < 1$.

We consider the curve

$$y = F_{r-1}(x) \qquad (\xi < x < 2\xi),$$

ξ being large and positive. The set of points x for which

$$|y| > \eta = e^{-\frac{1}{2}a\xi}$$

consists of a set of (open) intervals XX'; and

$$\int_X^{X'} \eta\,dx \leqq \left|\int_X^{X'} F_{r-1}(x)\,dx\right| = O(e^{-aX}) = O(e^{-a\xi})$$

so that

$$X' - X < \frac{A e^{-a\xi}}{\eta} < A\eta, \tag{4.61}$$

where the A's are constants. Suppose now that $X \leqq x \leqq X'$. Then

$$F_{r-1}(x) = F_{r-1}(X) - (x-X) F_{r-2}(X) + \ldots + (-1)^{r-2} \frac{(x-X)^{r-2}}{(r-2)!} F_1(X)$$
$$+ (-1)^{r-1} \int_X^x dx_1 \int_X^{x_1} dx_2 \ldots \int_X^{x_{r-2}} F(x_{r-1})\, dx_{r-1},$$

$$|F_{r-1}(x)| \leqq \eta + (X'-X) + \ldots + \frac{(X'-X)^{r-2}}{(r-2)!} + \left(\int_X^{X'} dx\right)^{r-1} |F|.^{23} \tag{4.62}$$

Suppose first that $r = 2$. Then (4.62) is

$$|F_1(x)| \leqq \eta + \int_X^{X'} |F|\, dx; \tag{4.63}$$

whence

$$\int_\xi^{2\xi} |F_1|\, dx \leqq \xi\eta - \sum \int_X^{X'} |F_1|\, dx \leqq 2\xi\eta + \sum (X'-X) \int_X^{X'} |F|\, dx \tag{4.64}$$
$$\leqq 2\xi\eta + \sum A\eta \int_X^{X'} |F|\, dx < 2\xi\eta + A\xi\eta < A\xi\eta = A\xi e^{-\frac{1}{2}a\xi},$$

by (4.63) and (4.61). From (4.64) it follows at once that $\int^\infty F_1\, dx$ is convergent.

If $r > 2$, (4.62) gives

$$|F_{r-1}(x)| < \eta + A(X'-X) < A\eta < A e^{-A\xi} < A e^{-Ax}; \tag{4.65}$$

so that $\int^\infty |F_{r-1}\, dx$ is convergent. It is plain that, if we start afresh from (4.65) and repeat the argument, we complete the proof of the lemma.

It follows from Lemma 13 that, if the condition of Theorem C is satisfied, all of $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ are integrable (L). The argument of §§ 4.3–4.4 is therefore valid, and the *sufficiency* of the condition is established. We have now to prove that it is also *necessary*, and this requires a series of further lemmas.

4.71. Lemma 14.[24] *The Fourier coefficients of a function, integrable* (C) *over* $(-\pi, \pi)$, *are* $o(n)$.

---

[23]) Since $|F_{r-1}(X)| \leqq \eta$. This inequality fails if X is ξ. But evidently the equation preceding (4.62) holds also with X' in place of X. If X is ξ, $|F_{r-1}(X')| \leqq \eta$, and (4.62) is still true.

[24]) This lemma is of course well-known, but we are unable to give a precise reference.

For if, *e. g.*,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, f(t)\, dt,$$

where $f(t)$ is integrable (C), and $\int_0^t f(t_1)\, dt_1 = F(t)$, we have

$$a_n = O(1) + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, F(t)\, dt = o(n),$$

since $F(t)$ is continuous.

Lemma 15. *If $f(t)$ and $\frac{F(t)}{t}$ are integrable (C), then*

$$\int_0^a \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nt \frac{F(t)}{t}\, dt \to 0 \quad (C, 1).$$

The lemma is trivial if $\frac{F(t)}{t}$ is integrable (L), the integral then tending to zero in the ordinary manner, by the theorem of Riemann-Lebesgue. It is in any case trivial if the *sine* is chosen, since $F(t)$ is continuous and we can apply Fejér's theorem. We need therefore only consider the cosine integral.

Denoting the integral, in this case, by v_n, we have

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\frac{F(t)}{t}\, dt + O(1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \sin nt \cot\frac{1}{2}t \frac{F(t)}{t}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^a \cos nt \frac{F(t)}{t}\, dt + O(1)$$

$$= \int_0^a \sin nt \frac{F(t)}{t^2}\, dt + o(n),$$

by Lemma 14; so that what we have to prove is that

$$i_n = \int_0^a \sin nt \frac{F(t)}{t^2}\, dt = o(n). \tag{4.711}$$

Write

$$i_n = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_{\delta}^{a} = k_n + l_n + m_n. \tag{4.712}$$

In the first place

$$(4.713) \qquad k_n = n\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin nt}{nt}\,\frac{F(t)}{t}\,dt = n\int_0^{\eta} \frac{F(t)}{t}\,dt \qquad \left(0<\eta<\frac{1}{n}\right),$$

since $\frac{\sin nt}{nt}$ decreases steadily from 1 throughout the interval of integration. Next

$$(4.714) \qquad |l_n| = \left|\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \sin nt\,\frac{F(t)}{t^2}\,dt\right| \leqq \mu\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\frac{dt}{t^2} < \mu n,$$

where μ is the maximum of $|F(t)|$ in $(0,\delta)$. Finally, when δ is fixed,

$$(4.715) \qquad m_n = o(1) = o(n)$$

by the theorem of Riemann-Lebesgue. It is plain that (4.711) follows from (4.712)–(4.715), by choice first of δ and then of n.

Lemma 16. *If* $\sum \frac{a_n}{n}$ *is convergent, then*

$$\chi(\varepsilon) = \sum \frac{a_n}{n}\int_{n\varepsilon}^{nt}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}t_1}{\frac{1}{2}t}\right)^2 dt_1$$

is continuous for $\varepsilon = 0$.

We may replace the upper limit in the integral by ∞, since $\int_{nt}^{\infty}$ is a positive decreasing function of n. Also $\int_{n\varepsilon}^{\infty}$ is a positive decreasing function of n for every fixed $\varepsilon \geqq 0$, and is a bounded function of (n,ε). Hence

$$\sum \frac{a_n}{n}\int_{n\varepsilon}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t}\right)^2 dt$$

is uniformly convergent, and therefore continuous.

4.72. We suppose now that $\varphi(t)$ satisfies the conditions of 4.1, except that the integrals

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt$$

may exist only as Cauchy integrals[25]; and that

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt = o(1).$$

[25] The existence of the second integral is (by the second mean-value theorem) a corollary of that of the first.

In these circumstances we shall continue to call a_n the "Fourier coefficient" of $\varphi(t)$.

Lemma 17. *If* (i) $\varphi(t)$ *is integrable* (C), (ii) $a_n = o(1)$. *and* (iii) A *is summable, then* $\varphi(t)$ (*or* $\psi(t)$) *is integrable* (C).

If

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1, \qquad \Phi_2(t) = \int_0^t \varphi_1(t_1)\,dt_1,$$

we have $\Phi_1 = o(1)$, $\Phi_2 = o(t)$ and

$$\int_\varepsilon^a \varphi_1\,dt = \int_\varepsilon^a \frac{\Phi_1}{t}\,dt = \frac{\Phi_2(a)}{a} - \frac{\Phi_2(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^a \frac{\Phi_2(t)}{t^2}\,dt.$$

What we have to prove, then, is that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^a \frac{\Phi_2(t)}{t^2}\,dt \tag{4.721}$$

exists.

Now $\Phi_1(t)$, being continuous, possesses a Fourier series which is uniformly summable $(C, 1)$; and

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt = \frac{a_n}{n}$$

(since Φ_1 is periodic); so that

$$\Phi_1(t) = \sum' \frac{a_n}{n}\sin nt.$$

The series is uniformly summable, and therefore uniformly convergent, since its general term is $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Integrating, dividing by t^2, and integrating again, we obtain

$$\int_\varepsilon^a \frac{\Phi_2(t)}{t^2}\,dt = \sum' \frac{a_n}{n^2}\int_\varepsilon^a \frac{1-\cos nt}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sum' \frac{a_n}{n}\int_{n\varepsilon}^{na}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t}\right)^2 dt. \tag{4.722}$$

But $\sum' \frac{a_n}{n}$ is summable (since A is summable), and its general term is $o\left(\frac{1}{n}\right)$, so that it is convergent. Hence, by Lemma 16, (4.722) is continuous for $\varepsilon = 0$. That is to say, the limit (4.721) exists, which proves the lemma.

4.73. We return now to the analysis of 4.3, assuming only that $\varphi(t)$ satisfies the conditions of Lemma 17, and that A is summable.

Then ψ_1 (or φ_1) is integrable (C), by Lemma 17. And we can determine γ_1, as in § 4.31, so that

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t)\,dt = 0,$$

the integral being now a Cauchy integral.

We now perform the transformations of § 4.31, appealing, however, to Lemma 15 instead of the theorem of Riemann-Lebesgue. We have

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(N-\frac{1}{2}\right)t}{t}\,\Phi_1(t)\,dt \to 0 \quad (C,1),$$

by Lemma 15, and therefore

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(N-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,\Phi_1(t)\,dt \to 0 \quad (C,1).$$

Hence

$$\sum_{n}^{N} \frac{a_\nu}{\nu} \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,\Phi_1(t)\,dt \quad (C,1)$$

when $N \to \infty$. But $\frac{a_\nu}{\nu} = o\left(\frac{1}{\nu}\right)$, and we may therefore omit the $(C,1)$. That is to say, (4.312) *is still valid under our more general hypotheses.*

Next, (4.321) holds, in the $(C,1)$ sense, by Lemma 15, and the proof that $b_{n,1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ is unchanged. Hence (4.321) still holds in the ordinary sense, and our discussion of the series B_1 remains valid.

We have therefore proved

Lemma 18. *If* (i) φ *is integrable* (C), (ii) $a_n = o(1)$, *and* (iii) A *is summable, then* ψ_1 *is integrable* (C). *The Fourier coefficient of* ψ, *is also* $o(1)$, *and differs from* $a_{n,1}$ *by the general term of a series summable* $(C,-1)$ *to sum* 0.

We note in passing an interesting corollary of our analysis.

Lemma 19. *If* φ *is integrable* (L), *or, more generally, satisfies the conditions of Lemma* 17, *then the necessary and sufficient condition that*

the series $\sum \frac{a_n}{n}$ *should be convergent is that* ψ_1 *(or* φ_1*) should be integrable* (C). *If this condition is satisfied, and* $a_0 = 0$, *then*

$$\sum \frac{a_n}{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t)\, dt. \quad (4.733)$$ [26])

4, 8. We can now complete the proof of Theorem C. We prove in fact a little more, since we need not suppose φ integrable (L). It is only necessary to assume that it satisfies the conditions of Lemma 17. For, if A is summable (C), ψ_1, by Lemma 18, satisfies the same conditions as φ, and therefore $\psi_2, \psi_3, \ldots$ also satisfy them; and the Fourier constants of these functions are related as in §§ 4. 3 and 4. 4. The proof of 4. 4 is therefore still valid.

4. 9. It remains only to prove Theorem C 1, which follows from Theorem C in the same way that Theorem B 1 followed from Theorem B. The first part of the proof is exactly the same, while the second part is a little simpler, since we use Lemma 8 instead of Lemma 9.

Postscript (July 1923).

We add two further remarks.

(1) The condition (1. 28) of Theorem C, viz.

$$\text{(a)} \qquad \varphi_k(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \int_0^{t_{k-2}} \frac{dt_{r-1}}{t_{r-1}} \int_0^{t_{k-1}} \varphi(t_k)\, dt_k \to 0,$$

may be replaced by

$$\text{(b)} \qquad \varphi_{(k)}(t) = \frac{k}{t^k} \int_0^t (t-u)^{k-1} \varphi(u)\, du \to 0.$$

[26]) The formula

$$\sum \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \log\left(\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} t\right) dt$$

(equivalent to (4. 733)) has been proved by Young (On a certain series of Fourier, Proc. London Math. Soc. (2) **11** (1912), pp. 357–366) on the assumption that $\varphi \log |\varphi|$ is integrable (L): a more natural condition would be the integrability of $\varphi \log |t|$. In an earlier memoir (On the Fourier constants of a function, Proc. Roy. Soc. (A), **85** (1910), pp. 14–25) he proved it on the assumption that φ^2 is integrable. In an intermediate paper (On the convergence of certain series involving the Fourier constants of a function, *ibid.* **87** (1912), pp. 217–224) he showed that is is true if $|\varphi|^{1+\delta}$ $(\delta > 0)$ is integrable, and in fact that $\Sigma n^{-q} a_n$ is then convergent if $(1+\delta)q > 1$.

The two forms of mean value are in fact equivalent: either of (a) or (b) implies the other. This equivalence theorem is naturally a theorem of the same character as the Knopp-Schnee equivalence theorem, or Landau's analogue for integrals[27]); but it is not identical with, nor immediately deducible from, the latter.

(2) There is a theorem, of the same character as Theorem C, concerning the trigonometrical series "allied" or conjugate to the Fourier series of $f(t)$.

We say that the integral

$$\int_0^a h(t)\,dt,$$

where $h(t)$ is a function integrable (L) over (ε, a) for every positive ε, "exists in the Cesàro sense", and has the value A, if

$$H(t) = \int_t^a h(t)\,dt, \quad H_1(t) = \int_0^t H(t_1)\,dt, \quad H_2(t) = \int_0^t H_1(t_1)\,dt, \quad \ldots$$

and

$$H_k(\varepsilon) \sim \frac{A\varepsilon^k}{k!}$$

for some value of k. This being so, our theorem is as follows:

Theorem D. *The necessary and sufficient condition that the series conjugate to the Fourier series of $f(t)$ should be summable (C), for $t = x$, is that the integral*

$$\int_0^a \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt$$

should exist in the Cesàro sense.

The proof does not differ in principle from that of Theorem C.

[27]) E. Landau. Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes für Integrale. Leipziger Berichte **65** (1913), S. 131—138.

(Eingegangen am 6. April 1923.)

Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit.

Von

Konrad Knopp in Königsberg.

In § 1 will ich einen allgemeinen Grenzwertsatz für Zahlenfolgen beweisen (Satz 1), der als eine in einer besonderen Richtung liegende Verallgemeinerung bekannter Grenzwertsätze angesprochen werden kann. Die Bedeutung dieses Satzes[1]) will ich — in § 2 — zunächst nur dadurch exemplifizieren, daß ich zwei in der Theorie der Cesàroschen (C-) und Hölderschen (H-) Summierbarkeit grundlegende Sätze — nämlich den sogenannten *Äquivalenzsatz* dieser Summierungsverfahren und einen *Umkehrsatz* derselben (Näheres s. u.) — in wenigen Zeilen aus ihm folgere.

In § 3 komme ich auf einen schon 1917 von mir bewiesenen Grenzwertsatz zurück[2]), von dem inzwischen (1921) durch G. H. Hardy ein Spezialfall erneut bewiesen worden ist[3]), während eine Verallgemeinerung desselben die überaus fruchtbare Grundlage seiner neuesten, gemeinsam mit J. E. Littlewood angestellten Untersuchungen bildet[4]). Ich gebe eine in einer andern Richtung liegende, aber ebenso weit reichende Verallgemeinerung, auf die ich schon in der genannten Note von 1917 hingewiesen hatte.

In § 4 soll dieser Satz zu einem neuartigen und besonders kurzen Beweise des schon in § 2 behandelten Umkehrsatzes benutzt werden.

[1]) Der Satz ist von etwas anderem Charakter als viele ähnlich lautende Grenzwertsätze. Nur ein sehr allgemeiner, aber (wohl wegen seiner etwas fremdartigen Einkleidung) bis jetzt wenig beachteter Grenzwertsatz von G. Faber (*Über die Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte*, Sitzungsberichte der Kgl. Bayr. Akademie der Wissenschaften, Math.-Phys. Klasse, Jahrgang 1913, S. 519—531) ist von ähnlicher Art. Seine Beweismethoden sind indessen ganz andere und weniger einfache.

[2]) K. Knopp, *Über die Oszillationen einfach unbestimmter Reihen*, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jahrgang 16 (1917), S. 45—50.

[3]) G. H. Hardy, *A theorem concerning summable series*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **20** (1921), S. 304—307.

[4]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier series*, s. die vorangehende Abhandlung dieses Bandes der Mathematischen Zeitschrift.

§ 1.

Satz 1. *Wenn bei gegebener Zahlenfolge* (s_n) *die Beziehung*

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-\nu}{k}\binom{p+\nu}{p} s_\nu \simeq s \cdot \binom{n+k+p+1}{k+p+1}^{5})$$

für ein bestimmtes ganzzahliges $k \geqq 0$ *und ein bestimmtes ganzzahliges* $p \geqq 0$ *besteht, so bleibt sie richtig, wenn* k *durch eine größere oder* p *durch irgendeine ganze Zahl* $\geqq 0$ *ersetzt wird (oder beides zugleich geschieht)* [6]).

Beweis. Es genügt ersichtlich zu zeigen:

a) Wenn die Beziehung (1) für ein $k \geqq 0$ und ein $p \geqq 1$ besteht, so bleibt sie richtig, wenn in ihr p durch $p-1$ ersetzt wird.

b) Wenn die Beziehung (1) für ein $k \geqq 0$ und für $p = 0$ besteht, so bleibt sie richtig, wenn in ihr k durch $k+1$ ersetzt wird.

c) Wenn die Beziehung (1) für ein $k \geqq 0$ und für $p = 0$ besteht, so bleibt sie richtig, wenn in ihr p irgendeine natürliche Zahl bedeutet.

Um a) zu beweisen, formen wir die in (1) linkerhand stehende Summe dadurch um, daß wir

$$\binom{p+\nu}{p} = \frac{p+\nu}{p}\binom{p-1+\nu}{p-1} = \frac{(n+k+p+1)-(n+k+1-\nu)}{p}\binom{p-1+\nu}{p-1}$$

setzen und demgemäß die Summe in zwei Teile zerlegen. So wird

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-\nu}{k}\binom{p+\nu}{p} s_\nu$$

$$= \frac{n+k+p+1}{p}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+k-\nu}{k}\binom{p-1+\nu}{p-1}s_\nu - \frac{k+1}{p}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+k+1-\nu}{k+1}\binom{p-1+\nu}{p-1}s_\nu.$$

[5]) Die Schreibweise $A_n \simeq s \cdot B_n$ soll im folgenden stets bedeuten, daß $A_n : B_n \to s$ strebt, — auch wenn $s = 0$ ist.

[6]) Die Benutzung der Binomialkoeffizienten hat den Vorteil, daß sich die Rechnungen der Beweise reibungsloser vollziehen, als wenn die entsprechenden Potenzen verwendet werden. Tut man dies und nimmt noch $s = 0$ — was die Allgemeinheit eines solchen Satzes bekanntlich nicht einschränkt —, so kann man Satz 1 einfacher so formulieren: *Wenn bei gegebener Zahlenfolge* (s_n) *die Beziehung*

$$(1') \qquad \sum_{\nu=0}^{n} (n-\nu)^k \nu^p s_\nu = o(n^{k+p+1})$$

für ein bestimmtes $k \geqq 0$ *und ein bestimmtes* $p \geqq 0$ *besteht, so bleibt sie richtig, wenn* k *durch eine größere oder* p *durch irgendeine Zahl* $\geqq 0$ *ersetzt wird (oder beides zugleich geschieht).* — Bei dieser Formulierung wird auch deutlich, daß die Beschränkung auf ganzzahlige k und p unwesentlich ist.

Setzen wir nun zur Abkürzung die erste der hier rechts auftretenden Summen

$$(2) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-\nu}{k} \binom{p-1+\nu}{p-1} s_\nu = \binom{n+k+p}{k+p} x_n,$$

so wird die zweite

$$= \binom{k+p}{k+p} x_0 + \binom{1+k+p}{k+p} x_1 + \ldots + \binom{n+k+p}{k+p} x_n,$$

und unsere Voraussetzung (1) erhält, wenn wir noch durch $\binom{n+k+p+1}{k+p+1}$ dividieren, die Form

$$(3) \qquad \frac{p+k+1}{p} x_n - \frac{k+1}{p} \frac{\binom{k+p}{k+p} x_0 + \binom{1+k+p}{k+p} x_1 + \ldots + \binom{n+k+p}{k+p} x_n}{\binom{n+k+p+1}{k+p+1}} \longrightarrow s.$$

Hiernach würde es genügen, wenn wir aus (3) folgern könnten, daß schon

$$(4) \qquad x_n \longrightarrow s$$

strebt; denn dies ist, gemäß der Definition (2) von x_n, genau die Ausgangsbeziehung (1), wenn in ihr p durch $p-1$ ersetzt wird. Daß nun (4) aus (3) folgt, ist ein einfacher Spezialfall[7]) des folgenden wichtigen Grenzwertsatzes, mit dessen Beweis dann auch der unserer Behauptung a) vollendet sein wird:

Satz 2. *Sind die b_n irgendwelche positive Zahlen, für die $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert, so folgt, falls $\alpha > 0$ ist, aus*

$$(3') \qquad \alpha x_n + (1-\alpha) \frac{b_0 x_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n}{b_0 + b_1 + \ldots + b_n} \longrightarrow s,$$

daß auch schon

$$(4') \qquad x_n \longrightarrow s$$

strebt[8]).

[7]) $\alpha = \dfrac{p+k+1}{p}, \qquad b_n = \binom{n+k+p}{k+p}.$

[8]) Für $b_n = 1$ ist dies ein zuerst von I. Schur (*Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte*, Mathematische Annalen **74** (1913), S. 447–458) ausgesprochener und bewiesener Satz. Im Anschluß an dessen Note habe ich (ebenda, S. 459–461) einen jede Rechnung vermeidenden Beweis desselben gegeben. Dieser Beweismethode schließt sich auch der obige Beweis an. — Der Satz ist seitdem mehrfach wiedergefunden und erweitert worden (vgl. die Arbeiten von W. Sierpiński, T. Kojima, S. Narumi, Y. Okada in The Tôhoku Mathematical Journal **11–15**, 1916–1919). Die obige Fassung läßt sich aus einer von Y. Okada (*A Theorem on Limits*, a. a. O. **15** (1919), S. 280–283) gegebenen Verallgemeinerung des Schurschen Satzes folgern. Der dortige Beweis ist aber ein anderer, rein rechnerischer.

Beweis. Es genügt den Satz für reelle x_n zu beweisen, da er dann für komplexe x_n sofort durch Zerlegung in ihren reellen und imaginären Teil sich ergibt. Setzen wir dann

$$\frac{b_0 x_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n}{b_0 + b_1 + \ldots + b_n} = X_n,$$

so gilt die einfache Bemerkung:

(B) *Wenn für ein bestimmtes* n

$$x_n < X_n \text{ ist, so ist } X_{n-1} > X_n.$$

Denn $x_n < X_n$ bedeutet

$$x_n(b_0 + b_1 + \ldots + b_n) < b_0 x_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n$$

oder

$$b_n x_n(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}) < b_n(b_0 x_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_{n-1} x_{n-1})$$

oder

$$(b_0 x_0 + \ldots + b_n x_n)(b_0 + \ldots + b_{n-1}) < (b_0 + \ldots + b_n)(b_0 x_0 + \ldots + b_{n-1} x_{n-1})$$

d. h.

$$X_n < X_{n-1}.$$

Nun genügt es offenbar, aus (3′) die *Existenz* des Grenzwertes $\lim X_n$ zu erschließen. Denn mit ihm müßte nach (3′) auch $\lim x_n$ existieren. Da aber beide dann nach bekannten Sätzen einander gleich sein müssen, so folgt aus (3′) weiter, daß beide $= s$ sein müssen, womit (4′) bewiesen wäre. Die Existenz von $\lim X_n$ beweisen wir nun indirekt so:

Wenn dieser Grenzwert nicht existiert, so sind die beiden Häufungsgrenzen $\overline{\lim}\, X_n$ voneinander verschieden und man kann u und v der Bedingung

$$\underline{\lim}\, X_n < u < v < \overline{\lim}\, X_n$$

gemäß wählen. Es muß nun unendlich viele Indizes q geben, für die $X_q < u$ ist, und unendlich viele Indizes q', für die $X_{q'} > v$ ist. Es seien q und $q' > q$ zwei bestimmte solche Indizes. Liegt nun für $n = q'$ der Fall (B) *nicht* vor, so ist $x_{q'} \geqq X_{q'} > v$. Wenn für $n = q'$ aber (B) zutrifft, so ist auch schon $X_{q'-1} > v$. Es kann aber nicht für alle $n = q', q' - 1, \ldots, q + 1$ der Fall (B) eintreten, da sonst auch $X_q > v$ sein müßte. Also muß es unter den genannten Indizes einen ersten geben, für den (B) *nicht* eintrifft. Für diesen ist dann wieder

$$x_n \geqq X_n > v.$$

Diese Beziehung muß also jedenfalls, wenn $\lim X_n$ nicht existiert, für unendlich viele n erfüllt sein. Für jedes solche n ist dann aber auch — da $\alpha > 0$ sein sollte —

$$\alpha x_n + (1 - \alpha) X_n = X_n + \alpha(x_n - X_n) > v.$$

Und da man, wenn $\lim X_n$ nicht existiert, ganz analog schließen kann, daß unendlich oft

$$\alpha x_n + (1-\alpha) X_n < u$$

sein muß, so kommen wir wegen $u < v$ zu einem Widerspruch zur Voraussetzung (3'). Folglich muß $\lim X_n$ doch existieren und nach den Vorbemerkungen also $x_n \to s$ streben. Damit ist der Beweis von Satz 2 und mit ihm der der Behauptung a) unter Satz 1 vollendet.

Die Behauptung b) desselben ist nichts anderes als der sogenannte Permanenzsatz der C-Summierbarkeit: Wenn eine Folge C_{k-1}-limitierbar ist zum Werte s, so ist sie auch C_{k+2}-limitierbar zum gleichen Werte[9].

Bezüglich c) endlich ist zu zeigen, daß aus

$$(5) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-\nu}{k} s_\nu \asymp s \cdot \binom{n-k+1}{k-1}$$

die Beziehung (1) sich für jedes $p \geqq 1$ ergibt.

Wir setzen dazu, wie in der Theorie der C-Summierung üblich,

$$s_n = S_n^{(0)} \quad \text{und für } \lambda \geqq 1 \quad S_n^{(\lambda)} = S_0^{(\lambda-1)} + S_1^{(\lambda-1)} + \ldots + S_n^{(\lambda-1)}.$$

Dann bedeutet (5) nichts anderes als

$$(6) \qquad S_n^{(k+1)} \asymp s \cdot \binom{n+k+1}{k+1},$$

bedeutet also genau, daß die Folge (s_n) C_{k-1}-limitierbar ist zum Werte s. Mit dieser Bezeichnung ist nun aber die linke Seite von (1) einfach

$$(7) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-k-\nu}{k} \binom{p+\nu}{p} s_\nu = \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda \binom{k-\lambda}{k} \binom{n+p+\lambda}{p-\lambda} S_{n-\lambda}^{(k-1-\lambda)},$$

wie man sofort erkennt, wenn man beiderseits die Glieder mit demselben s_ν sammelt. Da nämlich allgemein

$$S_m^{(q+1)} = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m-q-\nu}{q} \cdot s_\nu,$$

so bekommt s_ν auf der rechten Seite von (7) den Koeffizienten

$$\sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda \binom{k+\lambda}{k} \binom{n+p-\lambda}{p-\lambda} \binom{k-n-\nu}{k+\lambda}.$$

[9] Den sehr einfachen Beweis findet man z. B. in meinem Lehrbuch „*Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*", Berlin 1922, S. 454.

Ersetzt man hier die Binomialkoeffizienten $\binom{a+b}{a}$ durch ihre expliziten Werte $\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$, so ergibt eine leichte Umformung, daß dies

$$\frac{(k+n-\nu)!\,(p+\nu)!}{k!\,n!\,p!}\sum_{\lambda=0}^{p}(-1)^{\lambda}\binom{p}{\lambda}\binom{n+p-\lambda}{p+\nu}$$

ist. Und da jetzt die Summe eine leicht auszurechnende p-te Differenz — nämlich $\Delta^p\binom{n+p-x}{\nu+p}$ für $x=0$, also einfach $\binom{n}{\nu}$ bedeutet, so findet man, daß dies in der Tat mit dem Koeffizienten von s_ν auf der linken Seite von (7) übereinstimmt.

Da nun nach der Voraussetzung (5) bzw. (6) und nach dem schon erwähnten Permanenzsatz des C-Verfahrens für jedes $q \geqq k$

$$S_m^{(q+1)} \simeq s\cdot\binom{m+q+1}{q+1} \simeq s\cdot\binom{m+p+q+1}{q+1}$$

ist, und da die rechte Seite der jetzt bewiesenen Identität (7) nur eine feste Anzahl Summanden enthält, so lehrt (7) unmittelbar, daß

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+k-\nu}{k}\binom{p+\nu}{p}s_\nu \simeq s\cdot\sum_{\lambda=0}^{p}(-1)^{\lambda}\binom{k+\lambda}{k}\binom{n+p-\lambda}{p-\lambda}\binom{n+k+p+1}{k+1-\lambda}$$

ist. Die rechte Seite ist aber

$$= s\cdot\frac{(n+k+p+1)!}{k!\,n!\,p!}\sum_{\lambda=0}^{p}(-1)^{\lambda}\binom{p}{\lambda}\frac{1}{k+1+\lambda} = s\cdot\binom{n+k+p+1}{k+p+1},$$

womit alles bewiesen ist. —

Es ist vielleicht nicht überflüssig die wahre Quelle für die an sich ganz elementare Identität (7) aufzudecken: Setzt man

$$\sum_{n=0}^{\infty}s_n z^{n+p} = f(z),$$

so steht auf der linken Seite von (7) offenbar der Koeffizient von z^n in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}}\cdot\frac{1}{p!}f^{(p)}(z),$$

es steht dort also der Wert

$$\frac{1}{p!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{C})}\frac{f^{(p)}(z)}{(1-z)^{k+1}z^{n+1}}\,dz,$$

bei dem $(\mathfrak{C})$ etwa den positiv umlaufenen Kreis $z=\frac{1}{2}$ bedeuten kann. Durch p-malige partielle Integration geht dieser Ausdruck in die Form

$$\frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{C})}f(z)\left[\frac{1}{(1-z)^{k+1}z^{n+1}}\right]^{(p)}dz$$

über. Rechnet man hier die im Integranden stehende p-te Ableitung aus, so wird der Ausdruck weiter

$$(8) \quad = \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^{\lambda} \binom{k+\lambda}{k} \binom{n+p-\lambda}{p-\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int^{(\mathfrak{C})} \frac{f(z)}{(1-z)^{k+1+\lambda} z^{n+p+1-\lambda}} dz.$$

Hierin ist aber das an letzter Stelle stehende Integral nach Division durch $2\pi i$ nichts anderes als der Koeffizient von $z^{n-\lambda}$ in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1+\lambda}} \cdot \frac{f(z)}{z^{p}}, \qquad \text{also} \qquad = S_{n-\lambda}^{(k+1+\lambda)}.$$

Setzt man dies in den zuletzt für die *linke* Seite von (7) erhaltenen Ausdruck (8) ein, so erhält man genau die *rechte* Seite von (7), womit diese Identität erneut bewiesen ist.

§ 2.

1. Wir wollen nun zeigen, daß aus unserm Satz 1 sofort der Äquivalenzsatz der Cesàroschen und Hölderschen Mittel folgt, — und zwar auf eine Weise, die es gestattet, den Übergang von den einen zu den andern aufs deutlichste zu verfolgen:

Ist s_n irgendeine Zahlenfolge, so bezeichnen wir das n-te Glied ihrer C_q-Transformation kurz mit $C_q(s_n)$. Ihre gewöhnlichen arithmetischen, also auch ersten Hölderschen Mittel bezeichnen wir mit $H(s_n)$ oder $H_1(s_n)$, deren arithmetische Mittel mit $H_2(s_n)$ usw., also das n-te Glied ihrer H_q-Transformation mit $H_q(s_n)$. Dann lautet der in Rede stehende

Äquivalenzsatz[10]. *Wenn für ein bestimmtes* $r \geqq 1$ *einer der beiden Grenzwerte*

$$\lim_{n \to \infty} C_r(s_n) \qquad \textit{und} \qquad \lim_{n \to \infty} H_r(s_n)$$

existiert, so existiert auch der andere, und beide sind einander gleich.

Beweis. Da für irgendwelche x_n

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+q-\nu}{q} x_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+q-1-\nu}{q-1} (x_0 + x_1 + \ldots + x_\nu)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+q-1-\nu}{q-1} \binom{\nu+1}{1} \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_\nu}{\nu+1}$$

[10]) Der Satz ist zuerst von mir (1907) und W. Schnee (1909) bewiesen worden. Andere Beweise gaben G. Faber (s. Fußn. 1), I. Schur (s. Fußn. [8]), F. Hausdorff (*Summationsmethoden und Momentfolgen I*, Mathematische Zeitschrift 9 (1921), S. 74–109) u. a. Diese machen auch genauere Literaturangaben zum Äquivalenzsatze.

ist und da infolgedessen diese Ausdrücke sämtlich oder sämtlich nicht

$$\simeq \xi \cdot \binom{n+q+1}{q+1}$$

sind, so besagt unser Satz 1, wenn wir durch ihn den Faktor $\binom{r+1}{1}$ bei der dritten der drei Summen fortschaffen: *wenn eine Folge* (x_n) C_{q+1}*-limitierbar ist zum Werte* ξ, *so sind die arithmetischen Mittel* $\frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}$ C_q*-limitierbar zum gleichen Werte* ξ, *und umgekehrt.* Daher ist jede der $(r+1)$ Beziehungen

$$\begin{aligned} C_r(s_n) &\to s, \\ C_{r-1}H_1(s_n) &\to s, \\ &\cdots\cdots \\ C_1 H_{r-1}(s_n) &\to s, \\ H_r(s_n) &\to s \end{aligned}$$

eine Folge der übrigen, insbesondere die erste eine Folge der letzten, und umgekehrt.

2. Wir zeigen weiter, daß auch der Hardysche Umkehrsatz des C-Verfahrens sich sofort aus unserm Satz 1 ableiten läßt:

O-$C_r \to K$-Satz[11]. *Ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ C_r*-summierbar zum Werte* s, *strebt also*

$$(9) \qquad C_r(s_n) = \frac{\binom{n+r-1}{r-1}s_0 + \binom{n+r-2}{r-1}s_1 + \ldots + \binom{r-1}{r-1}s_n}{\binom{n+r}{r}} \to s,$$

und ist

$$(10) \qquad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

etwa $n a_n < M$ *für* $n = 1, 2, \ldots$, *so ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent mit der Summe* s.

[11]) G. H. Hardy, *Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series*, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, 8 (1910), S. 302–320. — Hardy bezeichnet den Satz als „general Cesàro-Tauber theorem"; ich bezeichne ihn in der obigen Weise, weil er auf Grund einer O-Voraussetzung von der C_r-Summierbarkeit auf die Konvergenz zu schließen gestattet. (Vgl. meinen Vortrag *Neuere Untersuchungen in der Theorie der divergenten Reihen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 32 (1923), S. 43–67.) — Der Satz ist, soviel ich sehe, immer nur für $r = 1$ direkt bewiesen und von hier aus auf mehr oder minder großen Umwegen für beliebige r erweitert. Der obige Beweis geht bei beliebigem r ganz direkt vor.

Beweis. Aus (9) folgt nach Satz 1, daß für jedes ganze $p \geqq 0$ auch

$$(11)\quad \sigma_n^{(p)} = \frac{\binom{n+r-1}{r-1}\binom{p}{p}s_0 + \binom{n+r-2}{r-1}\binom{p+1}{p}s_1 + \cdots + \binom{r-1}{r-1}\binom{n+p}{p}s_n}{\binom{n+r+p}{r+p}} \to s$$

strebt. Ersetzt man im Zähler dieses Ausdrucks alle s_ν durch s_n, so ist der Ausdruck einfach $= s_n$; daher ist

$$(12)\qquad s_n - \sigma_n^{(p)} = \frac{1}{\binom{n+r+p}{r-p}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+r-\nu-1}{r-1}\binom{p+\nu}{p}(s_n - s_\nu).$$

Wegen (10) ist nun für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$

$$|s_n - s_\nu| = |a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \ldots + a_n| \leqq M\frac{n-\nu}{\nu+1} = M\left(\frac{n+1}{\nu+1} - 1\right)$$

und also nach (12)

$$|s_n - \sigma_n^{(p)}| \leqq \frac{M}{\binom{n+r+p}{r+p}} \left\{ \frac{n+1}{p} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+r-\nu-1}{r-1}\binom{p+\nu}{p-1} - \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+r-\nu-1}{r-1}\binom{p+\nu}{p} \right\}.$$

Da hier die erste Summe $= \binom{n+r+p}{r+p-1} - \binom{n+r}{r-1}$ und die zweite $= \binom{n+r+p}{r+p}$ ist, so ist erst recht

$$|s_n - \sigma_n^{(p)}| \leqq \frac{M}{\binom{n+r+p}{r+p}} \left\{ \frac{r+p}{p}\binom{n+r+p}{r-p} - \binom{n+r+p}{r-p} \right\} = M \cdot \frac{r}{p}.$$

Läßt man hierin $n \to +\infty$ rücken, so folgt wegen (11), daß auch

$$\overline{\lim}\,|s_n - s| \leqq M \cdot \frac{r}{p}$$

ist. Und da p beliebig groß sein darf, so folgt weiter, daß

$$\lim |s_n - s| = 0,$$

ist, daß also

$$s_n \to s$$

strebt, w. z. b. w.

3. Sind die a_n reell und ist nur die *einseitige* Beschränktheit von (na_n) bekannt, etwa $na_n < M$, so lehren diese Schlüsse nur, daß

$$\overline{\lim}\,(s_n - s) \leqq 0 \qquad \text{oder also} \qquad \overline{\lim}\, s_n \leqq s$$

ist. Auf diese Bemerkung werden wir am Ende von § 4 wieder zurückkommen.

§ 3.

In meiner einleitend genannten Note aus dem Jahre 1917 bewies ich den Satz, daß eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit den Teilsummen s_n dann und nur dann C_1-summierbar ist zum Werte s, wenn für ein reelles $\lambda \geqq 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ konvergiert und

$$s_n + n^\lambda \left[\frac{a_{n+1}}{(n+1)^\lambda} + \frac{a_{n+2}}{(n+2)^\lambda} + \dots \right] \to s$$

strebt[12]). Ist dies für *ein* $\lambda \geqq 1$ richtig, so gilt es für *jedes* reelle $\lambda \geqq 1$. Bezeichnet man mit σ_n und σ die Teilsummen und Summe der Reihe $\sum \frac{a_n}{n^\lambda}$, so kann man diesen Satz auch dahin interpretieren, daß die Abweichungen $s - s_n$, die die Teilsummen s_n gegen ihren C_1-Limes aufweisen und die (außer wenn die Reihe von vornherein konvergiert) *nicht* gegen 0 streben, mit den *sicher* gegen 0 strebenden Abweichungen $\sigma - \sigma_n$ der σ_n von σ durch die Beziehung

$$s - s_n = n^\lambda [\sigma - \sigma_n] + o(1)$$

verknüpft sind.

Wir führen hier wieder statt der Potenzen n^λ die entsprechenden Binomialkoeffizienten ein, — was die Rechnungen wesentlich erleichtern wird —, und beweisen so den

Satz 3. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die C_1-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit den Teilsummen s_n zur Summe s besteht darin, daß für ein ganzes $k \geqq 1$ die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} \tag{13}$$

konvergiert und daß, wenn mit σ_n $(n = 1, 2, \dots)$ und σ die Teilsummen und Summe dieser Reihe bezeichnet werden, die Beziehung

$$s - s_n = \binom{n}{k} [\sigma - \sigma_n] + o(1) \tag{14}$$

oder

$$s_n + \binom{n}{k} \left[\frac{a_{n+1}}{\binom{n}{k}} + \frac{a_{n+2}}{\binom{n+1}{k}} + \dots \right] \to s \tag{15}$$

[12]) Für $\lambda = 1$ ist dies der von G. H. Hardy[3]) bewiesene Satz.

besteht. Ist dies für ein ganzes $k \geqq 1$ *richtig, so gilt es für jedes ganze* $k \geqq 1$.[13])

Beweis. 1. $\sum a_n$ *sei* C_1*-summierbar.* Dann ist wegen $a_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}$ zunächst

$$(16) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} = -\frac{s_n}{\binom{n}{k}} + \frac{k}{k+1} \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{s_\nu}{\binom{\nu}{k+1}} + \frac{s_{n+p}}{\binom{n+p}{k}},$$

und wenn man wie bisher $s_0 + s_1 + \ldots + s_n = S_n'$, $s_n = S_n' - S_{n-1}'$ setzt, ganz ebenso

$$(17) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} = -\frac{s_n}{\binom{n}{k}} - \frac{k}{k+1} \frac{S_n'}{\binom{n+1}{k+1}} + \frac{k}{k+2} \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{S_\nu'}{\binom{\nu+1}{k+2}}$$
$$+ \frac{s_{n+p}}{\binom{n+p}{k}} + \frac{k}{k+1} \frac{S_{n+p}'}{\binom{n+p+1}{k+1}}.$$

Da nun für C_1-summierbare Reihen $s_n = o(n)$, $S_n' = O(n)$ ist, so folgt für $p \to \infty$

$$(18) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} = -\frac{s_n}{\binom{n}{k}} - \frac{k}{k+1} \frac{S_n'}{\binom{n+1}{k+1}} + \frac{k}{k+2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{S_\nu'}{\binom{\nu+1}{k+2}},$$

da die letzte Reihe jetzt (absolut) konvergiert. Damit ist die Konvergenz von (13) für jedes $k \geqq 1$ bewiesen und ferner, daß

$$(19) \qquad s_n + \binom{n}{k} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} = -k\,c_n' + k \binom{n}{k} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{c_\nu'}{\binom{\nu}{k+1}}$$

ist, wenn $\frac{S_n'}{n+1} = c_n'$ die C_1-Transformation der Folge (s_n) bedeutet. Wegen

$$(20) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\binom{\nu}{k+1}} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

und wegen $c_n' \to s$ folgt aus (19) nun in bekannter Weise die behauptete Beziehung (15).

2. *Ist umgekehrt* (15) *für ein* $k \geqq 1$ *erfüllt*, so bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, $s = 0$ anzunehmen (man hätte nur a_0

[13]) Der Einfachheit wegen beschränken wir uns wieder auf ganzzahlige k; doch ist diese Beschränkung nicht wesentlich.

durch $a_0 - s$ zu ersetzen). Dann ist aber nach der in (19) gewonnenen Darstellung der linken Seite von (15)

$$-k\frac{S'_n}{\binom{n}{k+1}} + k\binom{n}{k}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{S'_\nu}{(\nu+1)\binom{\nu}{k+1}} = o(1),$$

oder

$$-S'_n + (k+1)\cdot(n+1)\,n(n-1)\dots(n-k+1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{S'_\nu}{(\nu+1)\,\nu(\nu-1)\dots(\nu-k)} = o$$

Wenn nun zur Abkürzung[14])

$$(n+1)\,n(n-1)\dots(n-k+1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{S'_\nu}{(\nu+1)\,\nu\dots(\nu-k)} = \varphi_n$$

gesetzt wird, so kann also unsere jetzige Voraussetzung (15) in der Form

$$(k+1)\,\varphi_n - S'_n = o(n) \tag{21}$$

geschrieben werden. Nun ist aber

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = (n+1)\,n\dots(n-k+1)\sum_{n+1}^{\infty} - n(n-1)\dots(n-k)\left(\frac{S'_n}{(n+1)\dots(n-k)} + \right.$$

$$= (k+1)\frac{\varphi_n}{n+1} - \frac{S'_n}{n+1} = \frac{(k+1)\,\varphi_n - S'_n}{n+1}.$$

Nach (21) ist also $\varphi_n - \varphi_{n-1} = o(1)$ und folglich $\varphi_n = o(n)$, so daß nach (21) auch $S'_n = o(n)$ sein muß, — was nun eben besagt, daß $c'_n \to 0$ strebt, also Σa_n eine C_1-summierbare Reihe ist. Und nun folgt nach dem 1. Teil des Beweises, daß (15) für *jedes* $k \geqq 1$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen.

Dieser Satz gestattet eine unmittelbare Verallgemeinerung auf C_λ-summierbare Reihen. Wir setzen dabei wie üblich

$$a_n = S_n^{(-1)}, \quad s_n = S_n^{(0)} \quad \text{und} \quad S_n^{(\lambda)} = S_0^{(\lambda-1)} + S_1^{(\lambda-1)} + \dots + S_n^{(\lambda-1)}$$

für $\lambda \geqq 1$, so daß für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ die Folge der Zahlen

$$c_n^{(\lambda)} = \frac{S_n^{(\lambda)}}{\binom{n+\lambda}{\lambda}} \tag{22}$$

die C_λ-Transformation der Folge (s_n) darstellt.

[14]) Durch den folgenden, von G. H. Hardy herrührenden Kunstgriff ließen sich meine früheren Beweise etwas vereinfachen.

Satz 4. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die C_r-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Summe s besteht darin, daß für ein ganzes $k \geqq r$ die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} \tag{13}$$

konvergiert und daß, wenn mit σ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, und σ die Teilsummen und Summe dieser Reihe und mit $(c_n^{(\lambda)})$ die C_λ-Transformierte der Folge (s_n) bezeichnet wird, die Beziehung

$$[s - s_n] + \binom{k}{1}[s - c_n'] + \binom{k+1}{2}[s - c_n''] + \ldots + \binom{k+r-2}{r-1}[s - c_n^{(r-1)}] = \binom{n}{k}[\sigma - \sigma_n] + o(1) \tag{23}$$

oder

$$s_n + \binom{k}{1} c_n' + \binom{k+1}{2} c_n'' + \ldots + \binom{k+r-2}{r-1} c_n^{(r-1)} + \binom{n}{k} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} \to \binom{k+r-1}{r-1} \cdot s \tag{24}$$

besteht. Ist dies für ein $k \geqq r$ richtig, so gilt es für jedes $k \geqq r$. [13])

Beweis. 1. *$\sum a_n$ sei C_r-summierbar.* Dann ist $s_n = o(n^r)$, während für $\lambda = 1, 2, \ldots, r$ wenigstens $S_n^{(\lambda)} = O(n^r)$ ist. Wiederholt man nun die Abelsche partielle Summation, die zu (16) und (17) geführt hat, indem man in (17) $S_n' = S_n'' - S_{n-1}''$, dann $S_n'' = S_n''' - S_{n-1}'''$, ... schließlich $S_n^{(r-1)} = S_n^{(r)} - S_{n-1}^{(r)}$ setzt, im ganzen $(r+1)$-mal, so erhält man für $p \to +\infty$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} = -\frac{s_n}{\binom{n}{k}} \frac{k}{k+1} \frac{S_n'}{\binom{n+1}{k+1}} - \frac{k}{k+2} \frac{S_n''}{\binom{n+2}{k+2}} - \ldots - \frac{k}{k+r} \frac{S_n^{(r)}}{\binom{n+r}{k+r}} + \frac{k}{k+r+1} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{S_\nu^{(r)}}{\binom{\nu+r}{k+r+1}}, \tag{25}$$

da die letzte Reihe jetzt (absolut) konvergiert. Damit ist zunächst die Konvergenz der Reihe (13) für jedes $k \geqq r$ bewiesen. Führt man nun an Stelle der $S_n^{(\lambda)}$ vermöge (22) die C_λ-Transformationen $c_n^{(\lambda)}$ ein, so kann man (25) auf die Form

$$s_n + \binom{k}{1} c_n' + \binom{k+1}{2} c_n'' + \ldots + \binom{k+r-2}{r-1} c_n^{(r-1)} + \binom{n}{k} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} = -\binom{k+r-1}{r} c_n^{(r)} + \frac{k}{k+1} \binom{k+r}{r} \binom{n}{k} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{c_\nu^{(r)}}{\binom{\nu}{k+1}} \tag{26}$$

bringen, die für $r = 1$ ersichtlich wieder (19) liefert.

Aus (26) folgt nun mit Hilfe von (20) unmittelbar, daß, wenn $c_n^{(r)} \to s$ strebt, der in (24) linkerhand stehende Ausdruck

$$\to \left[-\binom{k+r-1}{r} + \frac{k}{k+1}\binom{k+r}{r} \cdot \frac{k+1}{k} \right] \cdot s = \left[-\binom{k+r-1}{r} + \binom{k+r}{r} \right] s$$
$$= \binom{k+r-1}{r-1} \cdot s$$

strebt. Die Bedingungen (24) oder (23) sind also notwendig für die C_r-Summierbarkeit der Reihe Σa_n.

2. *Ist umgekehrt* (24) *für ein* $k \geqq r$ *erfüllt*, so bedeutet es wieder keine Einschränkung der Allgemeinheit, $s = 0$ anzunehmen. Nach der Darstellung (26) des in (24) linkerhand stehenden Ausdrucks kann dann unsere jetzige Voraussetzung in der Form

$$(27) \qquad -\binom{k+r-1}{r} c_n^{(r)} + \frac{k}{k+1}\binom{k+r}{r}\binom{n}{k} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{c_\nu^{(r)}}{\binom{\nu}{k+1}} = o(1)$$

geschrieben werden. Aus ihr wäre zu folgern, daß

$$(28) \qquad c_n^{(r)} = o(1) \quad \text{oder} \quad S_n^{(r)} = o(n^r)$$

ist. Führt man aber in (27) statt der $c_n^{(\lambda)}$ wieder die $S_n^{(\lambda)}$ ein, so können wir dafür

$$-k(k+1)\dots(k+r-1)\frac{S_n^{(r)}}{(n+r)\dots(n+1)}$$
$$+k(k+1)\dots(k+r)\cdot n(n-1)\dots(n-k+1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{S_\nu^{(r)}}{(\nu+r)\dots(\nu-k)} = o(1$$

oder

$$(29) \quad (k+r)\cdot(n+r)\dots(n-k+1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{S_\nu^{(r)}}{(\nu+r)\dots(\nu-k)} - S_n^{(r)} = o(n^r)$$

schreiben.

Setzt man zur Abkürzung

$$(n+r)\dots(n-k+1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{S_\nu^{(r)}}{(\nu+r)\dots(\nu-k)} = \varphi_n,$$

so lautet also unsere jetzige Voraussetzung

$$(30) \qquad (k+r)\varphi_n - S_n^{(r)} = o(n^r).$$

Nun ist aber

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = (n+r)\dots(n-k+1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty} - (n+r-1)\dots(n-k)\Big[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} + \frac{S_n^{(r)}}{(n+r)\dots}$$
$$= (n+r-1)\dots(n-k+1)[(n+r)-(n-k)]\cdot\sum_{\nu=n+1}^{\infty} - \frac{S_n^{(r)}}{n+r},$$

oder

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = \frac{(k+r)\varphi_n - S_n^{(r)}}{n+r}.$$

Nach (30) ist also $\varphi_n - \varphi_{n-1} = o(n^{r-1})$, folglich $\varphi_n = o(n^r)$ und, abermals nach (30),

$$S_n^{(r)} = o(n^r),$$

w. z. b. w. Und nun folgt nach dem 1. Teil des Beweises, daß (24) für *jedes* $k \geqq r$ gilt.

Für die Summierungen nach dem Hölderschen (H-)Verfahren liegen die Dinge ganz ähnlich; nur in den Einzelheiten der Rechnung treten kleine Unterschiede auf. Es genügt daher wohl, wenn wir den entsprechenden Satz ohne Beweis folgen lassen. Wir setzen dabei wie üblich $s_n = h_n^{(0)}$ und für $\lambda \geqq 1$

$$h_n^{(\lambda)} = \frac{h_0^{(\lambda-1)} + h_1^{(\lambda-1)} + \ldots + h_n^{(\lambda-1)}}{n+1},$$

so daß für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots$ die Folge der Zahlen $h_n^{(\lambda)}$ die H_λ-Transformation der Folge (s_n) darstellt.

Satz 5. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die* H_r*-Summierbarkeit der Reihe* Σa_n *zur Summe* s *besteht darin, daß für ein* $k \geqq r$ [13]) *die Reihe* (13) *konvergiert und daß, wenn* σ_n *und* σ *wieder die Teilsummen und die Summe dieser Reihe* (13) *bedeuten, die Beziehung*

$$1)\quad [s - s_n] + k[s - h_n'] + k(k+1)[s - h_n''] + \ldots + k(k+1)^{r-2}[s - h_n^{(r-1)}] = \binom{n}{k}[\sigma - \sigma_n] + o(1)$$

oder

$$(32)\quad s_n + kh_n' + k(k+1)h_n'' + \ldots + k(k+1)^{r-2} h_n^{(r-1)} + \binom{n}{k} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu-1}{k}} \to (k+1)^{r-1} \cdot s$$

besteht. Ist dies für ein $k \geqq r$ *richtig, so gilt es für jedes* $k \geqq r$. [15])

[15]) Die linke Seite von (32) ist jetzt

$$= -k(k+1)^{r-1} h_n^{(r)} + k(k+1)^{r-1} \binom{n}{k} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{h_\nu^{(r)}}{\binom{\nu}{k+1}}.$$

§ 4.

1. Mit Hilfe von Satz 3 läßt sich ein besonders eleganter Beweis des schon in § 2, 2 behandelten $O\text{-}C_r \to K$-Satzes für den (wichtigsten) Fall $r = 1$ führen:

$O\text{-}C_1 \to K$-Satz. *Aus* $c_n' \to s$ *und* $|na_n| < M$ *folgt* $s_n \to s$.

Beweis. Nach Satz 3 ist unter diesen Voraussetzungen für jedes $k \geqq 1$

$$|s - s_n| \leqq \frac{M}{k+1}\binom{n}{k}\left[\frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} + \frac{1}{\binom{n-2}{k+1}} + \dots\right] + o(1) = \frac{M}{k} + o(1),$$

also

$$\overline{\lim}\,|s - s_n| \leqq \frac{M}{k}.$$

Da dies für jedes $k \geqq 1$ gilt, so folgt sofort, daß $\lim |s - s_n| = 0$ ist, w. z. b. w.

2. Sind die a_n reell und ist nur die *einseitige* Beschränktheit von (na_n) bekannt, etwa $na_n < M$, so lehrt dieser Schluß nur, daß

$$\overline{\lim}\,(s - s_n) \leqq 0 \quad \text{oder} \quad \underline{\lim}\, s_n \geqq s$$

ist. In Verbindung mit der entsprechenden Bemerkung in § 2, 3 liefert dies aber den

Hardy-Landauschen Satz[16]: *Eine* C_1*-summierbare Reihe* Σa_n *mit reellen Gliedern, für die* $na_n < M$ *ist, konvergiert.*

3. Mit Hilfe von Satz 4 läßt sich analog der $O\text{-}C_r \to K$-Satz für beliebige r beweisen. Denn ist Σa_n C_r-summierbar und $|na_n| < M$, so lehrt er sofort, daß

$$\left|(s - s_n) + \binom{k}{1}(s - c_n') + \dots + \binom{k+r-2}{r-1}(s - c_n^{(r-1)})\right| \leqq \frac{M}{k} + o(1),$$

daß also für jedes $k \geqq r$

$$(33_1)\quad \overline{\lim}\left|(s - s_n) + \binom{k}{1}(s - c_n') + \dots + \binom{k+r-2}{r-1}(s - c_n^{(r-1)})\right| \leqq \frac{M}{k}$$

ist. Ersetzt man hier k durch $(k+1)$, so folgt durch Subtraktion, weil

$$\overline{\lim}\,|\beta_n - \alpha_n| \leqq \overline{\lim}\,|\alpha_n| + \overline{\lim}\,|\beta_n|$$

ist, sofort, daß auch

$$(33_2)\quad \overline{\lim}\left|(s - c_n') + \binom{k+1}{1}(s - c_n'') + \dots + \binom{k+r-2}{r-2}(s - c_n^{(r-1)})\right| \leqq \frac{2M}{k}$$

[16]) G. H. Hardy[11]) und E. Landau, *Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer*, Prace matematyczno fizyczne **21** (1910), S. 97–177.

ist. Durch Wiederholung dieses einfachen Schlusses folgt nacheinander

$$(33_3) \qquad \lim \left| (s - c_n'') + \ldots + \binom{k+r-3}{r-3} (s - c_n^{(r-1)}) \right| \leqq \frac{2^2 M}{k},$$

. . . . . .

$$(33_r) \qquad \lim \left| s - c_n^{(r-1)} \right| \leqq \frac{2^{r-1} M}{k},$$

gültig für jedes $k \geqq r$. Jetzt liefern diese Beziehungen von der letzten an rückwärts bis zur ersten nacheinander

$$c_n^{(r-1)} \to s, \quad c_n^{(r-2)} \to s, \quad \ldots, \quad c_n' \to s, \quad s_n \to s, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Königsberg i. P., 28. April 1923.

(Eingegangen am 30. April 1923.)

Über diejenigen Strahlensysteme, deren Brennflächen durch die Systemstrahlen isometrisch aufeinander bezogen werden.

Von

Axel Schur in Hannover.

Bekanntlich ist das allgemeine Problem, alle Flächen von einem gegebenen Linienelement zu finden, nur in den wenigsten Fällen direkt zu lösen. Es sind deshalb eine Reihe von Verfahren ausgebildet worden, um ausgehend von speziellen Lösungen eine möglichst allgemeine zu konstruieren. Unter diesen ist wohl heute das weitreichendste das von Bianchi, Darboux, Guichard, Weingarten und ihren Schülern entwickelte Verfahren, welches eine Fläche von dem gegebenen Linienelement als den einen Brennflächenmantel eines Strahlensystems auffaßt, das nun so zu bestimmen ist, daß der zweite Mantel der Brennfläche ebenfalls das gegebene Linienelement hat, also zum ersten isometrisch ist. Dabei wird im allgemeinen die Abbildung, welche die Strahlen des Systems zwischen den Brennflächenmänteln vermitteln, von der Isometrie verschieden sein, und es entsteht so die Frage nach denjenigen Strahlensystemen, für die diese beiden Abbildungen zusammenfallen.

Diese Frage, deren geometrischer Sinn durch die folgende Formulierung wohl noch klarer in die Augen springt: *Ist es möglich, zwei isometrische Flächen in eine derartige Lage zu bringen, daß die Verbindungslinien einander in der Isometrie entsprechender Punkte beide Flächen in diesen berühren?* wird im folgenden bejahend beantwortet. Es zeigt sich, daß die Aufgabe lösbar ist für gewisse Rotations- und Schraubenflächen mit parabolischen Meridianen, deren Gleichungen sich in endlicher Form aufstellen lassen. Das Strahlensystem läßt sich dann in eine Schar von ∞^1 Rotations- oder Schraubenflächen mit derselben Achse anordnen und besitzt eine einparametrige Bewegung um diese in sich. Es stellt also insofern ein Analogon zu den Rotations- und Schraubenflächen im Strahlen-

raum dar. Hier liegt auch wieder ein Verknüpfungspunkt der folgenden Untersuchungen mit der klassischen Transformationstheorie der Flächen zweiten Grades von Bianchi, der bei seinen Untersuchungen über die geradlinigen Flächen 2. Grades auch von einer Erzeugung der Strahlensysteme durch Abrollen einer Regelfläche auf einer andern ausgeht, so daß man diese Strahlensysteme als Analoga der Translationsflächen deuten kann. Von diesem gemeinsamen Gesichtspunkt aus wird man auf die Frage nach allen zweidimensionalen Translationsmannigfaltigkeiten des Strahlenraumes geführt, die mit der Frage nach den Strahlensystemen mit isometrischen Brennflächen offenbar in nahem Zusammenhange steht. Ich werde auf diesen Gegenstand in Bälde noch ausführlicher zurückkommen.

1. Wenn wir uns die Aufgabe stellen, die Abbildung zu untersuchen, welche die Strahlen eines Strahlensystems zwischen den beiden Mänteln seiner Brennfläche vermitteln, so erscheint es zweckmäßig, die beiden Flächen $B_1(x_1, y_1, z_1)$ und $B_2(x_2, y_2, z_2)$ auf dasjenige Kurvennetz zu beziehen, welches die abwickelbaren Flächen des Strahlensystems aus ihnen ausschneiden. Dann umhüllen die Systemstrahlen auf jedem der beiden Brennflächenmäntel eine Schar von Parameterlinien, und zwar mögen sie B_1 längs der Kurven $v = \text{konst.}$ berühren und B_2 längs der Kurven $u = \text{konst.}$ Wählen wir nun eine der beiden Flächen als Leitfläche, so erhalten wir für die Koordinaten der andern die Darstellung:

$$x_2 = x_1 + b_1 \frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad \text{bzw.} \qquad x_1 = x_2 + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial v}, \tag{1}$$

und die entsprechenden in y_1, y_2 und z_1, z_2. Hieraus folgt zunächst:

$$b_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = - b_2 \frac{\partial x_2}{\partial v}, \tag{2}$$

und der Brennpunktsabstand:

$$\varrho = b_1 \sqrt{E_1} = b_2 \sqrt{G_2}. \tag{3}$$

b_1 und b_2 sind noch näher zu bestimmende Funktionen von u und v.

Nun ergibt sich nach (1) und (2):

$$b_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} = b_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} + b_2 \frac{\partial b_1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} + b_1 b_2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = - b_1 \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

$$b_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = b_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} + b_1 \frac{\partial b_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + b_1 b_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} = - b_2 \frac{\partial x_2}{\partial v};$$

oder:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} &= - \left(\frac{\partial \log b_1}{\partial v} + \frac{1}{b_2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{1}{b_1} \frac{\partial x_1}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} &= - \frac{1}{b_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} - \left(\frac{\partial \log b_2}{\partial u} + \frac{1}{b_1} \right) \frac{\partial x_2}{\partial v}. \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichungen zeigen die bekannte Tatsache, daß das durch die abwickelbaren Flächen des Strahlensystems auf den Brennmänteln ausgeschnittene Netz das gemeinsame konjugierte Netz der durch die Systemstrahlen zwischen ihnen vermittelten Abbildung ist.

2. Soll nun diese Abbildung insbesondere eine Isometrie sein, so müssen für dieses Netz die Fundamentalgrößen 1. Ordnung auf beiden Flächen übereinstimmen, es muß also sein:

$$E_1 = E_2, \qquad F_1 = F_2, \qquad G_1 = G_2. \tag{5}$$

Da sich aber die Koeffizienten der ersten Ableitungen der Koordinaten in den Gleichungen (4) durch die Fundamentalgrößen 1. Ordnung und ihre Ableitungen ausdrücken lassen, so müssen entsprechende Koeffizienten in beiden Gleichungen einander gleich sein. Die Gleichsetzung ergibt:

$$\frac{\partial \log b_1}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \log b_2}{\partial u} = 0$$

oder:

$$b_1 = b_1(u), \qquad b_2 = b_2(v).$$

Dann folgt aus (3) und der letzten (5):

$$\sqrt{E_1} = \frac{\varrho}{b_1(u)}, \qquad \sqrt{G_1} = \sqrt{G_2} = \frac{\varrho}{b_2(v)},$$

so daß wir das Quadrat des Linienelements in der Form:

$$ds_1^2 = ds_2^2 = \varrho^2\left(\frac{du^2}{b_1^2(u)} + \frac{2F_1}{\varrho^2}\,du\,dv + \frac{dv^2}{b_2^2(v)}\right)$$

finden. Dies können wir nun durch die Transformation der Parameter:

$$du_1 = \frac{du}{b_1(u)}, \qquad dv_1 = \frac{dv}{b_2(v)},$$

die das Netz der Parameterkurven ungeändert läßt, auf die einfachere Form:

$$ds_1^2 - ds_2^2 = \varrho^{(1)2}\left(du_1^2 + \frac{2F_1^{(1)}}{\varrho^{(1)2}}\,du_1\,dv_1 + dv_1^2\right) \tag{6}$$

bringen.

Führen wir diese speziellen Parameter ein, die wir jetzt mit u und v bezeichnen wollen, so nehmen die Gleichungen (1), (2), (3) und (4) die folgende einfache Gestalt an:

$$x_2 = x_1 + \frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad x_1 = x_2 + \frac{\partial x_2}{\partial v}, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{\partial x_2}{\partial v}, \tag{2a}$$

$$\varrho^2 = E_1 = G_2, \tag{3a}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = -\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\right), \qquad \frac{\partial^2 x_2}{\partial u\,\partial v} = -\left(\frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial x_2}{\partial v}\right). \tag{4a}$$

Aus (3a) und (5) folgt in Übereinstimmung mit (6):

$$E_1 = E_2 = G_1 = G_2 = \varrho^2. \tag{7}$$

Bilden wir ferner die mittleren Fundamentalgrößen F_1 und F_2, so finden wir:

$$\begin{aligned} F_2 &= \sum \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} = -\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u} = -\sum \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)\frac{\partial x_1}{\partial u} \\ &= -\left(E_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial u}\right) = -\varrho^2\left(1 + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = -\sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v} = -\sum \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2}\right)\frac{\partial x_2}{\partial v} \\ &= -\left(G_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial G_2}{\partial v}\right) = -\varrho^2\left(1 + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Dann folgt aus der zweiten Gleichung (5):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} = \frac{\partial \varrho}{\partial v},$$

also:

$$\varrho = \varrho(u + v). \tag{9}$$

Aus (7) und (8) und (9) erhalten wir also schließlich für das Quadrat des Linienelementes unserer Flächen den Ausdruck:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \varrho^2(u+v)\left(du^2 - 2\left(1 + \frac{\varrho'(u+v)}{\varrho(u+v)}\right)du\,dv + dv^2\right) \\ &= \varrho^2(du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Da nun die Fundamentalgrößen erster Ordnung sämtlich sich als Funktionen der einen Variablen $u + v = p$ darstellen lassen, so sind die Flächen vom Linienelement (10) in der Weise *zu Rotationsflächen isometrisch*, daß die Kurven $p =$ konst. den Parallelkreisen entsprechen. Weiter sieht man sofort, daß die Kurven $p = u + v =$ konst. und $q = u - v =$ konst. die Winkel des Netzes der Kurven $u =$ konst., $v =$ konst. halbieren. Denn transformiert man auf diese Parameter, so findet man:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \varrho^2(p)\left(\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\,dp^2 + \frac{1}{2}(1-\cos\omega)\,dq^2\right) \\ &= \varrho^2(p)\left(\cos^2\frac{\omega(p)}{2}\,dp^2 + \sin^2\frac{\omega(p)}{2}\,dq^2\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Da ferner der Netzwinkel ω selbst nur von p abhängt, so bleibt *längs jeder Kurve* $p =$ konst. *der Neigungswinkel*:

$$\vartheta = \frac{\pi - \omega}{2} \tag{12}$$

der Systemstrahlen gegen die Kurve konstant. Und dasselbe gilt von dem Brennpunktsabstand ϱ. Diese beiden wesentlichen Eigenschaften werden uns ein anschauliches Bild von dem Bau der Strahlensysteme gestatten.

3. Bevor wir jedoch die Strahlensysteme selbst betrachten, wollen wir unsere Kenntnis von den Brennflächen noch weiter vertiefen, indem wir auch noch die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung untersuchen. Berechnen wir etwa auf Grund von (1a) und (2a) die Größe N_2. Wegen der Beziehungen:

$$(13)\quad \frac{\partial x_2}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial v} = -\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial v}$$

finden wir:

$$(14)\quad N_2 = \frac{\left|\frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial v}\right|}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} = \frac{\left|\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}, -\frac{\partial x_1}{\partial u}\right|}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}$$

$$= -\frac{\left|\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}, \frac{\partial x_1}{\partial u}\right|}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} = -L_1.$$

L_2 können wir nun aus der Gaußschen Gleichung[1]) berechnen, die wegen $M_1 = M_2 = 0$ und der speziellen Werte der E, G, F die Form annimmt:

$$(15)\quad f(u+v) = K(EG - F^2) = L_1 N_1 = L_2 N_2$$

und wegen (14) liefert:

$$(16)\quad L_2 = -N_1.$$

Andrerseits können wir nach (15) setzen:

$$(17)\quad L_2 = \lambda L_1, \qquad L_2 = \frac{1}{\lambda} N_1$$

und finden nach (14) und (16)

$$(18)\quad \lambda = -\frac{N_1}{L_1}.$$

Für die Größe λ erhalten wir aber aus dem Ansatz (15), (17) vermöge der Codazzischen Gleichungen das vollständige System:

$$(19)\quad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{L_1}{N_1} \lambda(1-\lambda^2), \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{N_1}{L_1} \frac{1}{\lambda}(1-\lambda^2),$$

da die Parameterlinien das gemeinsame konjugierte Netz einer Isometrie bilden. Beachten wir nun den Wert (18) von λ und bemerken, daß, wie eine leichte Rechnung zeigt, für das Linienelement (10) sich ergibt:

$$(20)\quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = t(u+v),$$

[1]) Bianchi-Lucat, Vorlesung über Differentialgeometrie. 2. Aufl., (Teubner 1910), § 182, S. 342.

so erhalten wir:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = t(\lambda^2 - 1), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = t(\lambda^2 - 1), \tag{21}$$

also:

$$\lambda = \lambda(u + v). \tag{22}$$

Zur Bestimmung von L_1 und N_1 haben wir dann nach (15), (18) und (22) die beiden Gleichungen:

$$L_1 N_1 = f(u + v), \quad \frac{N_1}{L_1} = -\lambda(u + v), \tag{23}$$

aus denen folgt, daß L_1 und N_1 und nach (14) und (16) auch L_2 und N_2 sich als Funktionen der einen Variablen $p = u + v$ darstellen lassen. Da nun alle Fundamentalgrößen unserer Flächen sich durch $p = u - v$ allein darstellen lassen, so ergibt ein bekannter Satz von Enneper[2]) und Stäckel[3]), daß die Flächen nicht nur zu Rotationsflächen isometrisch sind, sondern *Rotationsflächen oder Schraubenflächen* sind, auf denen die Kurven $p =$ konst. Parallelkreise oder Schraubenlinien bilden. *Aus der oben ermittelten Konstanz von ϑ und ϱ längs einer Kurve $p =$ konst. folgt nun, daß die Strahlensysteme als Ganzes eine Bewegung in sich gestatten, bei der die Kurven $p =$ konst. Bahnkurven sind.* Wir werden darauf gleich noch zurückkommen.

Endlich wollen wir noch die Fundamentalgrößen 2. Ordnung in den Parametern $p = u + v$, $q = u - v$ anmerken:

$$\bar{L}_1 = \bar{N}_1 = -\bar{L}_2 = -\bar{N}_2 = \frac{1}{4}(L_1 + N_1), \quad \bar{M}_1 = \bar{M}_2 = \frac{1}{4}(L_1 - N_1). \tag{24}$$

4. Die letzten Formeln geben uns einen gewissen Aufschluß über den Charakter der Biegung, welche den einen Brennflächenmantel in den andern überführt. Zunächst zeigen sie, daß beide Flächen stets gleichzeitig Rotationsflächen bzw. Schraubenflächen sind. Bildet man ferner mit den Fundamentalgrößen (11) und (24) die Meusniersche Formel für die Normalkrümmung speziell für die Parameterlinien, so erkennt man, daß die Normalkrümmungen entsprechender Kurven auf beiden Flächen einander entgegengesetzt gleich sind. Da aber die geodätische Krümmung eine Biegungsinvariante ist, so folgt, daß entsprechende Kurven $p =$ konst. und $q =$ konst. dieselbe Totalkrümmung haben, die ja die positive Wurzel aus der Summe der Quadrate der Normalkrümmung und der geodätischen Krümmung ist. Wir können also, wenn wir die Rotationsflächen als Spezialfall der Schraubenflächen auffassen, das folgende vorläufige Ergebnis aussprechen:

[2]) Göttinger Nachrichten 1870, S. 335.

[3]) Leipziger Berichte 1898, S. 1.

Es ist nur bei gewissen Schraubenflächen möglich, sie mit einer ihrer Biegungsflächen in eine derartige Lage zu bringen, daß die Verbindungslinien einander bei der Biegung entsprechender Punkte beide Flächen in diesen berühren. Die Biegungsfläche ist ebenfalls eine Schraubenfläche, die aus der ersten durch eine Biegung hervorgeht, bei der die Schraubenlinien und ihre orthogonalen Trajektorien ihre Krümmung bewahren. Ist die eine der beiden Flächen eine Rotationsfläche so ist es auch die andere.

5. Ferner sind wir auch imstande, uns ein anschauliches Bild von dem Aufbau der Strahlensysteme zu machen. Wir hatten ja gefunden, daß längs der Kurven $p =$ konst. sowohl der Brennpunktabstand ϱ als auch der Neigungswinkel ϑ der Systemstrahlen konstant ist. Die Systemstrahlen längs einer Schraubenlinie der Fläche haben also alle gleiche Neigung gegen diese. Sie bilden folglich eine Schraubenregelfläche mit derselben Achse wie die Ausgangsfläche, die diese längs der Schraubenlinie berührt. Die zweite Fläche wird von der Regelfläche in einer Schraubenlinie berührt, deren Punkte von denen der ersten konstanten Abstand längs der Erzeugenden haben, während in je zwei Punkten auf derselben Erzeugenden beide Schraubenlinien dieselbe Krümmung haben. Es ist nun eine leicht zu beweisende Eigenschaft der Schraubenregelflächen, daß ihre Schraubenlinien paarweise gleiche Krümmung haben. Und zwar beschreiben je zwei Punkte der Erzeugenden, die entgegengesetzt gleiche Abstände vom Fußpunkt des kürzesten Abstandes der Erzeugenden von der Achse haben, krümmungsgleiche Schraubenlinien, wie ein entsprechender Satz ja auch für die Erzeugenden des einschaligen Rotationshyperboloids gilt. Endlich folgt noch aus dem ganzen Zusammenhang, daß auch die zweite Schraubenfläche dieselbe Achse und dieselbe Ganghöhe hat, wie die erste, da jede ihrer Schraubenlinien mit einer Schraubenlinie der ersten Fläche auf einer Schraubenregelfläche mit derselben Achse liegt. Wir können also unsere Ergebnisse noch durch folgendes ergänzen:

Die Strahlensysteme, deren Brennflächenmäntel die beiden Schraubenflächen sind, bestehen aus den Erzeugenden von ∞^1 Schraubenregelflächen, die die Schraubenflächen längs je zwei Schraubenlinien gleicher Krümmung berühren. Die Mittelfläche des Strahlensystems ist der Ort der kürzesten Abstände der Strahlen von der gemeinsamen Achse aller dieser Schraubenflächen, die überdies gleiche Ganghöhe haben.

6. Nunmehr können wir direkt die Differentialgleichung der Schraubenflächen aufstellen, die unser Problem lösen. Wir gehen aus von der Darstellung einer Schraubenfläche durch ihre Schraubenlinien und irgendeine Schar kongruenter Kurven:

$$(25)\quad x = r(p)\cos(q-\alpha(p)),\quad y = r(p)\sin(q-\alpha(p)),\quad z = \zeta(p)+hq.$$

Dann ergibt sich für die Fundamentalgrößen 1. Ordnung:

$$(26)\quad E = r'^2 + r^2\alpha'^2 + \zeta'^2, \qquad F = -r^2\alpha' + h\zeta', \qquad G = r^2 + h^2.$$

Sollen also die Kurven $q =$ konst. insbesondere die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien sein, so folgt:

$$(27)\quad \zeta' = \frac{r^2\alpha'}{h}, \qquad \zeta = \frac{1}{h}\int r^2\alpha'\,dp.$$

Dann wird:

$$(28)\quad E = r'^2 + r^2\alpha'^2\frac{h^2+r^2}{h^2}, \qquad F = 0, \qquad G = r^2 + h^2,$$

$$D = \sqrt{EG} = \frac{1}{h}\sqrt{(r^2+h^2)(r'^2h^2 + r^2\alpha'^2(r^2+h^2))}$$

und:

$$(29)\quad DL = \frac{h^2+r^2}{h}[r\alpha'(r\alpha'^2 - r'') + r'(2r'\alpha' + r\alpha'')],$$

$$DM = -\frac{1}{h}[r\alpha'^2(r^2+h^2) + r'^2h],$$

$$DN = \frac{r^2+h^2}{h}r^2\alpha'.$$

Nunmehr betrachten wir zwei Schraubenflächen:

$$(30)\quad x_1 = r_1\cos(q-\alpha_1), \qquad y_1 = r_1\sin(q-\alpha_1), \qquad z_1 = \zeta_1 + hq$$

$$(31)\quad x_2 = r_2\cos(q-\alpha_2), \qquad y_2 = r_2\sin(q-\alpha_2), \qquad z_2 = \zeta_2 + hq$$

von derselben Ganghöhe, die aufeinander abwickelbar sein sollen. Dann folgt aus (28) und (27):

$$(32)\quad r_1 = r_2, \quad \alpha_2' = -\alpha_1', \quad \alpha_2 = -\alpha_1 + \alpha_0, \quad \zeta_2' = -\zeta_1', \quad \zeta_2 = -\zeta_1 + \zeta_0,$$

(29) zeigt dann sofort die Relationen:

$$(33)\quad L_1 = -L_2, \qquad M_1 = M_2, \qquad N_1 = -N_2.$$

Die Gleichheit der Krümmungen der Schraubenlinien und ihrer orthogonalen Trajektorien auf beiden Flächen ist also eine unmittelbare Folge der Forderung, daß die Flächen gleiche Ganghöhe und gleiches Linienelement haben sollen.

Nach (32) können wir nun die beiden Flächen (30) und (31), indem wir die Indizes wieder weglassen, in der Form darstellen:

$$(34)\quad \begin{aligned} x_1 &= r\cos(q-\alpha), & y_1 &= r\sin(q-\alpha), & z_1 &= \zeta + hq \\ x_2 &= r\cos(q+\alpha-\alpha_0), & y_2 &= r\sin(q+\alpha-\alpha_0), & z_2 &= -\zeta + \zeta_0 + hq. \end{aligned}$$

Wir fragen uns nun weiter, ob wir diese beiden konaxialen Schraubenflächen durch passende Wahl der Konstanten α_0 und ζ_0 in eine derartige Lage bringen können, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte

beide Flächen berühren. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür sind:

$$(35)\quad \begin{vmatrix} x_1-x_2, & y_1-y_2, & z_1 & z_2 \\ \frac{\partial x_1}{\partial p}, & \frac{\partial y_1}{\partial p}, & \frac{\partial z_1}{\partial p} & \\ \frac{\partial x_1}{\partial q}, & \frac{\partial y_1}{\partial q}, & \frac{\partial z_1}{\partial q} & \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2 & z_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial p}, & \frac{\partial y_2}{\partial p}, & \frac{\partial z_2}{\partial p} & \\ \frac{\partial x_2}{\partial q}, & \frac{\partial y_2}{\partial q}, & \frac{\partial z_2}{\partial q} & \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen besagen, daß die Verbindungsgerade der Punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) sowohl in der Tangentialebene von (x_1, y_1, z_1) als auch in der von (x_2, y_2, z_2) liegt. Berechnet man nun die Determinanten (35), so ergibt sich, daß beide auf dieselbe Bedingung:

$$(36)\quad r[\cos(2\alpha-\alpha_0)-1](\alpha' h+\zeta')+r'[h\sin(2\alpha-\alpha_0)+2\zeta-\zeta_0]=0$$

führen. Berühren also die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte die eine Fläche, so berühren sie schon von selbst die andere.

7. Mit Hilfe der Differentialgleichung (36) kann man sofort alle einschlägigen Rotationsflächen bestimmen. Für diese ist:

$$(37)\qquad h=0, \qquad \alpha=0;$$

(36) geht also über in:

$$(38)\qquad r(\cos\alpha_0-1)\zeta'+r'(2\zeta-\zeta_0)=0.$$

Nun hatten wir bisher über den Parameter p noch nicht näher verfügt. Setzen wir aber:

$$(39)\qquad z=\zeta=p, \qquad r=r(\zeta),$$

so erhalten wir:

$$(40)\qquad \frac{r'}{r}=\frac{1-\cos\alpha_0}{2\zeta-\zeta_0}=\frac{1-\cos\alpha_0}{2}\,\frac{d\log(2\zeta-\zeta_0)}{d\zeta},$$

also:

$$(41)\qquad r=C(2\zeta-\zeta_0)^{\frac{1-\cos\alpha_0}{2}}$$

als Gleichung der Meridiankurve, oder nach $z=\zeta$ aufgelöst:

$$(42)\qquad z=\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{C}\right)^{\frac{2}{1-\cos\alpha_0}}+\frac{\zeta_0}{2}.$$

Führen wir diesen Wert von ζ und $h=0$ in (34) ein, so finden wir:

$$(43)\quad z_1=\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{C}\right)^{\frac{2}{1-\cos\alpha_0}}+\frac{\zeta_0}{2}, \qquad z_2=-\zeta+\zeta_0=-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{C}\right)^{\frac{2}{1-\cos\alpha_0}}+\frac{\zeta_0}{2},$$

also:

$$(44)\qquad z_1-\frac{\zeta_0}{2}=-\left(z_2-\frac{\zeta_0}{2}\right).$$

Die eine Rotationsfläche kann also aus der andern durch eine Spiegelung an der Ebene $z = \frac{\zeta_0}{2}$ abgeleitet werden. Doch ist dies nicht die Zuordnung, welche das Strahlensystem herstellt. Diese weist zwar allen Punkten eines Parallelkreises Punkte seines Spiegelbildes zu der Ebene $z = \frac{\zeta_0}{2}$ zu, jedoch entsprechen sich je zwei Punkte, deren Meridianebenen miteinander den Winkel α_0 bilden, wie aus (34) für $\alpha = 0$ folgt. Die Konstante ζ_0 bezieht sich also nur auf die Wahl des Koordinatensystems. Indem wir sie gleich Null setzen, fordern wir nur, daß die spiegelnde Ebene die Ebene $z = 0$ sei. Unter dieser Annahme erhalten wir als Gleichung des Meridians:

$$r = 2Cz^{\frac{1-\cos\alpha_0}{2}} \tag{45}$$

mit den zwei wesentlichen willkürlichen Konstanten C und α_0. Halten wir α_0 fest und variieren C, so erhalten wir eine Schar affiner Kurven mit der z-Achse als Affinitätsachse und zu ihr senkrechter Affinitätsrichtung. Der Exponent von z rechter Hand variiert, wenn α_0 seinen Wertvorrat durchläuft, zwischen 0 und 1, da $\cos\alpha_0$ alle Werte zwischen $+1$ und -1 annimmt. Besonders einfach wird das Ergebnis für $\alpha_0 = 0$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha_0 = \pi$. Im ersten Falle findet man:

$$r = 2C, \tag{46}$$

also die Rotationszylinder, im zweiten:

$$r^2 = 2Cz. \tag{47}$$

also die Rotationsparaboloide bezogen auf ihre Scheitel, endlich im Dritten:

$$r = 2Cz, \tag{48}$$

also die Rotationskegel bezogen auf ihre Spitzen. Der erste und letzte Fall zeigt zugleich, daß die beiden Brennflächenmäntel sehr wohl demselben algebraischen Gebilde angehören können, wenn dieses eine Symmetrieebene senkrecht zur Rotationsachse besitzt. In diesem Falle wird also die Gesamtfläche auf sich selbst abgebildet. Freilich handelt es sich in den beiden angegebenen Beispielen um ausgeartete Strahlensysteme, die hier aus den Erzeugenden der angegebenen Flächen bestehen. Aus Formel (47) folgt eine merkwürdige Beziehung zwischen einem Rotationsparaboloid, seinem Spiegelbild an der Scheiteltangentialebene und den beide Flächen längs ihrer Parallelkreise berührenden einschaligen Rotationshyperboloiden, deren Erzeugende ja hier die Strahlensysteme bilden. Die beiden Erzeugenden des Hyperboloids, welches durch einen beliebigen

Punkt P des Paraboloids geht, berühren das Spiegelbild in denjenigen beiden Punkten P_1 und P_2 des Spiegelbildes des Parallelkreises durch P, deren Meridiane mit dem Meridian von P die Winkel $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ einschließen. Dies folgt unmittelbar aus der Bedeutung von α_0.

Noch ein Wort über die Gestalt der allgemeinen Meridiankurven. Aus (45) folgt zunächst, daß für $z = 0$ auch $r = 0$, aber auch für keinen andern Wert von z. Die Kurve trifft also die Rotationsachse im Anfangspunkt und nur in diesem. Differenzieren wir ferner (45), so ergibt sich:

$$r' = 2Cz^{-\frac{1+\cos\alpha_0}{2}}. \tag{49}$$

Hier nimmt der Exponent von z alle Werte zwischen 0 und -1 an, also ist für $z = 0$ $r' = \infty$ außer in den beiden Grenzfällen (46) und (48). Da aber r' der Tangens des Neigungswinkels der Meridiantangente gegen die Rotationsachse ist, folgt, daß die Meridiantangente im Anfangspunkt auf der Rotationsachse senkrecht steht. Die Fläche hat also im Anfangspunkt einen Scheitelpunkt, dessen Tangentialebene die spiegelnde Ebene $z = 0$ ist. Die beiden Brennflächenmäntel berühren sich in ihren Scheitelpunkten. Endlich ergibt sich aus (45) und (49), daß r mit z stetig wächst, während r' mit wachsendem z stetig gegen Null abnimmt. Daraus ersieht man, daß alle Meridiankurven parabelartigen Charakter haben und der z-Achse durchweg ihre konkave Seite zukehren. Also sind die Rotationsflächen positiv gekrümmt in Übereinstimmung mit Formel (24) für $M_1 = M_2 = 0$. Schließlich mag noch angemerkt werden, daß sich unter den Rotationsflächen unendlich viele algebraische befinden, nämlich jedem Wert von α_0 entsprechend, für den $\cos\alpha_0$ rational ist, ∞^1 affine Flächen.

Die Strahlensysteme, die zu einem derartigen symmetrischen Rotationsflächenpaare gehören, bestehen, wie schon kurz erwähnt, aus den Leitscharen derjenigen ∞^1 Rotationshyperboloide, welche beide Flächen längs ihrer Parallelkreise berühren, deren Kehlkreise also sämtlich in der spiegelnden Ebene liegen, der Mittelfläche des Strahlensystems. Betrachtet man nun irgend zwei Rotationsflächen, die auseinander durch Spiegelung an einer Ebene senkrecht zur Rotationsachse hervorgehen, so besitzen diese stets eine Schar von ∞^1 Rotationshyperboloiden, die beide Flächen längs entsprechender Parallelkreise berühren, so daß durch das Strahlensystem ihrer Leitscharen die Parallelkreise aufeinander längentreu abgebildet werden. Diese Abbildung ist aber im allgemeinen nicht längentreu für alle Kurven auf der Fläche, da im allgemeinen die Meridiane sich nicht entsprechen werden, so daß die Abbildung nicht einmal winkel-

treu ist, wie das einfache Beispiel zweier kongruenten Kugeln zeigt[4]). Soll die Abbildung durchgängig längentreu sein, insbesondere also den Meridianen wieder Meridiane entsprechen, so ist dafür, wie wir gesehen haben, notwendig und hinreichend, daß der Winkel α_0, den die Meridianebenen entsprechender Punkte miteinander bilden, konstant ist, und das ist nur bei parabolischen Flächen, d. h. solchen, die weder einen Kehlkreis noch einen Äquator besitzen, möglich, die durch Spiegelung an der Scheiteltangentialebene auseinander hervorgehen, wie man sich leicht durch Anschauung überzeugt.

8. Die Bestimmung der Meridiane der Schraubenflächen gestaltet sich etwas mühsamer, führt aber schließlich zu ähnlich einfachen Ergebnissen. Wir führen zunächst in (36) die Werte (27) für ζ' und ζ ein und erhalten:

$$(50) \qquad \frac{r}{r'}[1-\cos(2\alpha-\alpha_0)]\,\alpha'(h^2+r^2)-h^2\sin(2\alpha-\alpha_0) = 2\int r^2\alpha'\,dp - h\zeta_0.$$

Differenzieren wir diese Gleichung, um das Integral auf der rechten Seite, das noch beide gesuchten Funktionen enthält, wegzuschaffen, so erhalten wir:

$$(51) \quad (r^2+h^2)\Big[\alpha''\frac{r}{r'}(1-\cos(2\alpha-\alpha_0))+2\frac{r}{r'}\sin(2\alpha-\alpha_0)\,\alpha'^2 + \alpha'(1-3\cos(2\alpha-\alpha_0))-\frac{rr''}{r'^2}\alpha'(1-\cos(2\alpha-\alpha_0))\Big]=0.$$

Der erste Faktor gleich Null gesetzt führt auf den trivialen Fall der Zylinder von Minimalgeraden. Der zweite Faktor ist die vollständige Ableitung von:

$$(52) \qquad \frac{r}{r'}[1-\cos(2\alpha-\alpha_0)]\,\alpha'-\sin(2\alpha-\alpha_0)=c,$$

wo c eine willkürliche Konstante ist. Bisher hatten wir über den Parameter p noch nicht verfügt. Nunmehr setzen wir:

$$(53) \qquad p=\operatorname{tg}\Big(\alpha-\frac{\alpha_0}{2}\Big).$$

Dann geht (52) über in:

$$(54) \qquad \frac{r'}{r}=\frac{2p^2}{[2p+c(1+p^2)](1+p^2)}.$$

Hieraus wollen wir nun r als Funktion von p berechnen und Gleichung

[4]) Diese Abbildung bei allgemeinen Rotationsflächen ist ein einfaches anschauliches Beispiel für eine krümmungstreue Abbildung, die nicht längentreu ist. Für die Kugel ergibt sich insbesondere eine nicht längentreue Abbildung von Flächen konstanter Krümmung, die anschaulich zugänglich ist.

(50) bzw. (36) dann zur Bestimmung von ζ ohne Quadratur benutzen. Dann folgt aus (54):

$$(55)\quad r^2 = A^2(1+p^2)\left[p+\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}\right]^{-\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right)}\left[p+\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{c}\right]^{-\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right)}$$

Um nun aus (50) ζ als Funktion von p zu finden, setzen wir zunächst für den Faktor von h^2+r^2 seinen Wert aus (52) und für das Integral seinen Wert aus (27) und erhalten:

$$(56)\quad [\sin(2\alpha-\alpha_0)+c](h^2+r^2)-h^2\sin(2\alpha-\alpha_0)=2h\zeta-h\zeta_0$$

oder:

$$(57)\qquad 2\zeta = hc+\zeta_0+\frac{r^2}{h}[\sin(2\alpha+\alpha_0)+c].$$

Führen wir hier rechts auf Grund von (53) und (55) den Parameter p ein, so ergibt sich:

$$(58)\quad \begin{aligned} 2\zeta &= hc+\zeta_0+\frac{r^2}{h}\frac{2p+c(1+p^2)}{1+p^2} = hc+\zeta_0+\frac{r^2c}{h(1+p^2)}\left[p+\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}\right]\left[p+\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{c}\right] \\ &= hc+\zeta_0+\frac{A^2c}{h}\left[p+\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}\right]^{-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}}\left[p+\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{c}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}} \end{aligned}$$

und aus (55):

$$(59)\quad r = A\sqrt{1+p^2}\left[p+\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}\right]^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right)}\left[p+\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{c}\right]^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right)}$$

Die Gleichungen (58) und (59) geben nun die Meridiane der gesuchten Schraubenflächen in Parameterdarstellung. Fragen wir insbesondere nach den reellen Zweigen dieser Kurven, so sehen wir, daß solche nur vorhanden sein können, wenn:

$$(60)\qquad 0<c^2<1, \quad \text{also:}\quad \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} > 1$$

ist. Eine weitere Bedingung für die Realität von ζ und r — ausgenommen den Fall, wo $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$ eine ungerade natürliche Zahl ist — ist die, daß beide Ausdrücke in den eckigen Klammern positiv ausfallen. Dies tritt ein, wenn p, das ja seiner Definition (53) gemäß alle Werte zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen kann, Werte zwischen $p=+\infty$ und $p=-\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{c}$ durchläuft. Für den kleinsten Wert $p=-\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{c}$ erhalten wir aus (58) und (59):

$$(61)\qquad r=0, \quad \zeta=\frac{1}{2}(hc+\zeta_0),$$

wie sofort durch Beachtung von (60) folgt. In diesem Punkte schneidet also die Kurve die Achse und zwar wieder rechtwinkelig, da in dem Ausdruck $\frac{r'}{\zeta'}$, der den Tangens des Neigungswinkels der Meridiantangente gegen die Achse liefert, bei Annäherung an den Punkt $p = -\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{c}$, der Nenner von höherer Ordnung verschwindet als der Zähler. Mit wachsendem p wächst sowohl r als ζ und beide werden für $p = +\infty$ unendlich groß. Die Kurve hat also auch hier parabolischen Charakter.

In dem oben erwähnten Ausnahmefall, wo $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$ eine ungerade natürliche Zahl ist, besitzt die Kurve außer dem eben beschriebenen noch einen zweiten reellen Zweig, der den Werten von p zwischen $p = -\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{c}$ und $p = \frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}$ entspricht. Für diesen Wertvorrat von p durchläuft ζ stetig alle Werte von $\zeta = \frac{1}{2}(hc + \zeta_0)$ bis $\zeta = -\infty$, während r von $r = 0$ durch negative Werte bis $r = -\infty$ bzw. durch positive Werte bis $r = +\infty$ geht, je nachdem die ungerade Zahl die Form $2n+1$ oder $4n+1$, wo im ersten Falle n ungerade ist, hat. Im ersten Falle haben wir also im Achsenschnittpunkt einen Wendepunkt, im zweiten Falle eine Spitze. Im Gegensatz zu den Rotationsflächen können hier also auch parabolische Meridiankurven auftreten, die im Achsenschnittpunkt ihre Tangente durchsetzen.

Das Strahlensystem besteht für die Schraubenflächen, wie schon ausführlich abgeleitet, aus den Erzeugenden derjenigen Schraubenregelflächen mit gleicher Achse und Ganghöhe, welche beide Flächen längs Schraubenlinien der gleichen Krümmung berühren. Die Mittelfläche F_0 des Strahlensystems, der Ort der Kehlschraubenlinien der Schraubenregelflächen ist eine Wendelfläche. Dies folgt unmittelbar aus ihrer Gleichung, die nach (34) lautet:

$$x_0 = r(p)\cos\left(\alpha(p) - \frac{\alpha_0}{2}\right)\cos\left(q - \frac{\alpha_0}{2}\right), \tag{62}$$

$$y_0 = r(p)\cos\left(\alpha(p) - \frac{\alpha_0}{2}\right)\sin\left(q - \frac{\alpha_0}{2}\right), \qquad z_0 = \frac{\zeta_0}{2} + hq.$$

Hieraus ist auch ersichtlich, daß den orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien auch auf der Mittelfläche die orthogonalen Trajektorien derselben, die Erzeugenden, entsprechen.

Wir haben also schließlich die gesuchten Strahlensysteme und ihre Brennflächen vollständig bestimmen und ihre Eigenschaften genau erforschen können, so daß das gestellte Problem als völlig erledigt gelten kann.

(Eingegangen am 15. Juni 1923.)

Über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung.

Von

Karl Grandjot in Göttingen.

Im Jahre 1908 veröffentlichte Herr Mertens in den Sitzungsberichten der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien[1]) einen schönen Beweis für die Irreduzibilität (im Körper der rationalen Zahlen) der Gleichung, der die primitiven n-ten Einheitswurzeln genügen. Beim Lesen dieser Arbeit bemerkte ich, daß jener Satz unmittelbar aus Dirichlets Satz von der Existenz unendlich vieler Primzahlen in der arithmetischen Progression folgt. Ich vermutete sofort, daß dies auch für Herrn Mertens der Ausgangspunkt seiner Überlegungen gewesen sei; und das bestätigte mir die Mitteilung des greisen Mathematikers, daß er ungefähr den von mir angegebenen Beweis um 1864 in einer von Weierstraß geleiteten Stunde des Berliner mathematischen Seminars vorgetragen habe, dann jedoch ihn liegen ließ, durch Weierstraß' Kritik an den in keinem Verhältnis zum Satze stehenden Hilfsmitteln bewogen, und ihn erst wieder aufnahm, als er einen Weg gefunden hatte, auf dem er sich die benötigten Primzahlen in einfacherer Weise verschaffte.

Trotz alledem veranlaßt mich zur Veröffentlichung des Beweises die Tatsache, daß er für den Kenner des Dirichletschen Satzes überaus kurz ist und helles Licht auf den Grund für die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung wirft. Diese ist ja völlig bewiesen durch den

Satz: *Bei* $n \geqq 1$, $\xi^n = 1$, $(r, n) = 1$ *folgt aus*

$$f(\xi) = 0,$$

[1]) Math.-naturw. Klasse 117. Abt. IIa, S. 689–690.

wo $f(x)$ ein ganzzahliges Polynom ist, stets

$$f(\xi^r) = 0.$$

Beweis: Für jede Primzahl $p \equiv r \pmod{n}$ gilt nach Fermat

$$0 \equiv (f(\xi))^p \equiv f(\xi^p) \equiv f(\xi^r) \pmod{p};$$

das Ideal $[f(\xi^r)]$ in $\mathsf{P}(\xi)$ hat also nach dem Dirichletschen Satz unendlich viele Teiler, d. h. ist das Nullideal.

Göttingen, am 1. Juni 1923.

(Eingegangen am 18. Juni 1923.)

Zur Geometrie ebener Massenanziehungsprobleme.

(Aus einem Briefe an E. Strömgren in Kopenhagen.)

Von

L. Vietoris in Wien.

..... Ich bin nicht Astronom und habe vom restringierten Dreikörperproblem dadurch zum erstenmal erfahren, daß ich Ihre Arbeit[1]) auf dem Tisch meines Kollegen Dr. Lense liegen sah und vor allem auf die schönen Figuren aufmerksam wurde. Ich hatte mich einige Monate vorher mit Brennpunkten ebener Kurven befaßt und hatte auch eine Anzahl Figuren gezeichnet, von denen eine mit Ihrer Fig. 5 (Group f) dem Anschein nach vollständig übereinstimmte. Der rein sinnliche Eindruck, den ich von der Lage der endlichen Massen hatte, war der, daß sie mir wie Brennpunkte der Bahnkurven aussahen. Eine kurze beiläufige Betrachtung, die ich im folgenden vor dem eigentlichen Beweis wiedergebe, erhob mir die aufgetauchte Vermutung zur größten Wahrscheinlichkeit und schließlich habe ich sie auch direkt aus den Differentialgleichungen heraus durch eine einfache Rechnung bestätigt.

Der Gedankengang ist kurz folgender:

$x = x(t)$, $y = y(t)$ seien die Gleichungen einer analytischen ebenen Kurve, d. h. $x(t)$, $y(t)$ seien als längs der Achse der reellen t analytische Funktionen gegeben.

$z(t) = x(t) + iy(t)$ ist dann ebenfalls längs derselben analytisch und sei beiderseits ins Komplexe der t-Ebene fortgesetzt gedacht. Die so definierte komplexe Funktion der komplexen Veränderlichen t bildet dann die t-Ebene auf eine z-Ebene konform ab.

---

[1]) Forms of periodic motion in the Restricted Problem and in the general Problem of Three Bodies, according to researches executed at the Observatory of Copenhagen (Publ. Nr. 39 der Kopenhagener Sternwarte).

Ich behaupte nun:

Die Verzweigungspunkte der zur Funktion $z(t)$ gehörigen Riemannschen Fläche, d. h. jene Punkte $z(t)$, für welche das zum selben t-Wert gehörige $z'(t) = 0$ ist, sind bis auf leicht zu übersehende Ausnahmen mit den reellen Brennpunkten der Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ identisch.

Brennpunkt heißt dabei nach Plücker jeder Schnittpunkt zweier Minimaltangenten der Kurve verschiedener Richtungen, d. h. zweier Tangenten der Kurve mit den Richtungskonstanten $+i$ und $-i$.

Reell ist ein solcher Brennpunkt dann und nur dann, wenn er Schnitt zweier *konjugiert* imaginärer Minimaltangenten ist.

Um nun einen reellen Brennpunkt zu finden, hat man zunächst einen (natürlich imaginären) Kurvenpunkt $x(t_1)$, $y(t_1)$ zu suchen, in dem die Tangentenrichtung $\pm i$, etwa $+i$ ist; d. h. man hat t_1 aus der Gleichung $\frac{y'(t_1)}{x'(t_1)} = i$ zu bestimmen, durch den Punkt $(x(t_1), y(t_1))$ die Gerade J mit der Richtungskonstanten i zu legen $[x + iy = x(t_1) + iy(t_1)]$ und J mit der konjugiert imaginären Geraden zum Schnitt zu bringen. Letzteres kommt darauf hinaus, den einzigen auf J liegenden reellen Punkt aufzusuchen. Hat er etwa die Koordinaten x_r, y_r, so muß $x_r + iy_r = x(t_1) + iy(t_1)$ sein, d. h. x_r und y_r sind einfach reelle und imaginäre Komponente von $x(t_1) + iy(t_1)$. Wenn wir den Punkt (x_r, y_r) durch die komplexe Zahl $x_r + iy_r = z_r$ darstellen, so ist z_r gegeben als $z_r = x(t_1) + iy(t_1)$, wo t_1 Wurzel der Gleichung $\frac{y'(t)}{x'(t)} = i$ oder $x'(t) + iy'(t) = 0$ oder $z'(t) = 0$ ist.

Damit sind die reellen Brennpunkte von $x = x(t)$, $y = y(t)$ als die behaupteten Verzweigungspunkte erwiesen, außer in jenen Fällen, wo $x'(t_1) = \infty$ ist. (Diese Brennpunkte nehmen in der Theorie der ebenen Kurven auch eine Ausnahmestellung ein und heißen nach Laguerre (Werke 2, S. 19) singulär. Sie unterscheiden sich von den „regulären" vor allem dadurch, daß sie nicht wie diese bei einer allgemeinen konformen Abbildung in Brennpunkte der Bildkurve übergehen.) Umgekehrt ist jeder Verzweigungspunkt ein reeller Brennpunkt.

Auf Grund der Plückerschen Definition der Brennpunkte wird man wohl kaum zur Vermutung kommen, daß sie in der Mechanik ebener Massenanziehungsprobleme eine Rolle spielen. Anders mit der hier auseinandergesetzten, soviel mir bekannt ist, neuen Charakterisierung. Hat z. B. eine analytische Kurve eine Schlinge, so kann man schließen, daß in dieser mindestens ein Brennpunkt liegt. Denn die Riemannsche Fläche der Funktion $z(t) = x(t) + iy(t)$ liegt im Punkt $z(t_1) = z(t_2)$

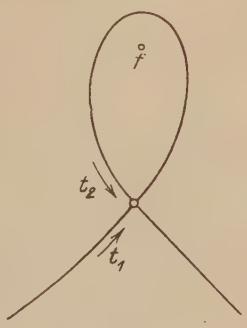

Fig. 1.

mindestens doppelt und wird von der Kurve so durchlaufen, daß der Punkt $z(t)$ dabei von einem Blatt in ein anderes gelangt, was nur möglich ist, wenn in der Schlinge mindestens ein Verzweigungspunkt liegt.

In einer Ebene anziehender, zum Koordinatensystem fester Massenpunkte wird man aus demselben Grunde diese als Brennpunkte aller Bahnkurven vermuten können, welche von irgendwelchen anderen in dieser Ebene freien Massenpunkten beschrieben werden. Denn aus physikalischen Gründen ist klar, daß die Kurven sich um diese festen Punkte herumwinden werden, wenn das System überhaupt stabil ist. Nun, und woherum sollen sie sich denn winden, wenn nicht um die Verzweigungspunkte der zugehörigen Riemannschen Flächen?

Der strenge Beweis ist aus den Differentialgleichungen leicht zu führen und zwar ist hier die Plückersche Definition geeigneter. Ich gebe den Beweis für einen allgemeineren Fall, unter den sich das „problème restreint" unterordnet, wenn man die eine endliche Masse in den Koordinatenanfangspunkt verlegt.

Die Differentialgleichungen eines Systems seien:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{cx}{r^3} + f\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{cy}{r^3} + g\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right),$$

wo c eine Konstante und f, g irgendwelche analytische Funktionen von $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ sein sollen[2]).

$x = x(t),\ y = y(t)$ sei eine Lösung, t_0 genüge der Gleichung $\frac{y(t_0)}{x(t_0)} = i$ und es sei $x(t_0) \neq 0$, da der Fall $x(t_0) = y(t_0) = 0$, der Fall der Ejektionsbahn, hier nicht interessiert.

Nun gilt:

$$2x'x'' + 2y'y'' = -\frac{2c(xx'+yy')}{r^3} + 2x'f + 2y'g$$

und

$$xy'' - yx'' = xg - yf,$$

wo für x und y die obige Lösung eingesetzt gedacht sei. Es stehen also links und rechts analytische Funktionen von t. Diese integrieren wir nun längs einer in einer gewissen Umgebung U von t_0 verlaufenden Kurve C der komplexen t-Ebene, welche bei einem Punkt t^* beginnen möge und in t_0 endigt. Es kommt:

[2]) Daß hier gerade das Newtonsche Anziehungsgesetz vorausgesetzt wird, ist für das Folgende nicht notwendig.

$$x'^2 + y'^2 = \frac{2c}{r} + 2\int_{t^*}^{t} (x'f + y'g)\,dt + [x'(t^*)]^2 + [y'(t^*)]^2 - \frac{2c}{r^*},$$

$$xy' - yx' = \int_{t^*}^{t} (xg - yf)\,dt + x(t^*)\,y'(t^*) - y(t^*)\,x'(t^*),$$

wo die beiden Integrale, abgesehen von Mehrdeutigkeiten, nur von t, nicht aber vom Integrationsweg C abhängen.

Die einzige Voraussetzung, die wir über f und g nun machen, ist folgende:

Die Umgebung U von t_0 soll so (klein) wählbar sein, daß die beiden Integrale existieren und dem absoluten Betrag nach unter einer bestimmten Schranke M bleiben, so lange, wie vorausgesetzt, der Integrationsweg C ganz in U liegt.

Für $\lim t = t_0$ wird wegen $y(t_0) = i\,x(t_0)$ $\lim\limits_{t=t_0} r = \lim\limits_{t=t_0} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, d. h.

$$\lim_{t=t_0} (x'^2 + y'^2) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{t=t_0} \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0.$$

Nun kann nicht zugleich $\lim\limits_{t=t_0} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$ und $\lim\limits_{t=t_0} \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$ sein. Also sei etwa $\lim\limits_{t=t_0} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \neq 0$. Dann ist wegen $\lim\limits_{t=t_0} \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$ und $x(t_0) \neq 0$

$$\lim_{t=t_0} \left(\frac{y'}{x'} - \frac{y}{x}\right) = 0, \quad \lim_{t=t_0} \frac{y}{x} = i, \quad \text{also} \quad \lim_{t=t_0} \frac{y'}{x'} = i.$$

Damit ist gezeigt, daß unter der gemachten Voraussetzung die Gerade $y = ix$ Tangente der Bahnkurve ist, also auch die Gerade $y = -ix$, und der Punkt $x = 0$, $y = 0$ ist Brennpunkt der Bahnkurve.

Es kann nun sein, daß die Gleichung $\frac{y(t)}{x(t)} = i$ nur für solche t befriedigt wird, für welche $x(t) = y(t) = 0$ ist. Dann ist der Punkt $(0, 0)$ Spitze der Bahnkurve, welche man auch unter die Brennpunkte rechnen kann.

Hat die Gleichung $\frac{y(t)}{x(t)} = i$ überhaupt keine Lösung, dann kann die Funktion $\frac{y(t)}{x(t)}$ nicht algebraisch sein, hat also sicher mindestens eine wesentlich singuläre Stelle t_0, in deren beliebiger Nähe die Funktion $\frac{y(t)}{x(t)}$ dem Wert i beliebig nahe kommt, die Funktion $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dem Wert 0 beliebig nahe und zufolge der nun wieder ausführbaren obigen Überlegungen $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ dem Wert i. Die Gerade $y = ix$ ist dann nur in einem erweiterten Sinn Tangente der Bahnkurve (in demselben Sinn, in dem man etwa auch

die y-Achse als Tangente der Kurve $y = \sin\frac{1}{x}$ ansehen kann) und der Punkt $(0, 0)$ ist dann in ebendemselben erweiterten Sinn Brennpunkt.

Für das restringierte Dreikörperproblem[2]) sind die obigen Voraussetzungen über f und g erfüllt, mit der einzigen Ausnahme, wo mit $\frac{y(t)}{x(t)} = i$ zugleich $r_2 = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$, d. i. der Abstand von der zweiten endlichen Masse, Null wird, d. h. wo der Punkt $x(t_0), y(t_0)$ der Punkt $(-1, -i)$ ist. In diesem Fall hat die Bahnkurve, wie man bei näherem Zusehen findet, einen Doppelpunkt.

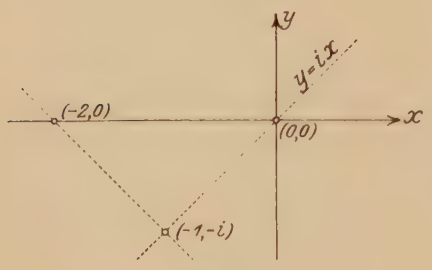

Fig. 2.

Alle Bahnkurven, welche nicht durch diesen (und damit auch nicht durch den konjugiert imaginären) Punkt gehen, haben also den Punkt $(0, 0)$ und ebenso den Punkt $(-2, 0)$ zu Brennpunkten.

Den Astronomen interessiert natürlich vor allem, was man mit dieser Erkenntnis anfangen kann.

Man wird eine Kurve als desto einfacher ansehen können, je weniger die zu ihr gehörige Abbildung $z(t) = x(t) + iy(t)$ verzweigt ist. Durch die Kenntnis von Verzweigungspunkten ist man nun in der Lage, die z-Ebene weiter in eine w-Ebene zu transformieren, $w = z(t)$, so daß für gewisse t-Werte auftretende Verzweigungen von z in w verschwunden sind. Auch kann man t in einen anderen Parameter τ so transformieren, daß die nun hergestellte Abbildung zwischen τ und z für gewisse besonders wichtige Werte z unverzweigt wird.

Auch die Hillsche Grenzkurve steht zu den Brennpunkten der Bahnkurven in Beziehung.

Die festen Massen sind natürlich nicht die einzigen Brennpunkte (ob reell oder nicht) und man kann fragen, wo die übrigen liegen. Da wird man zunächst jene Punkte der Bahnkurven suchen, in denen $\frac{y'(t)}{x'(t)} = i$ ist; d. h. man wird $x'^2 + y'^2 = 0$ setzen und erhält damit aus dem Jacobischen Integral die Gleichung der Hillschen Grenzkurve. Man sucht also die (imaginären) Schnittpunkte der Bahnkurven mit dieser. Die Tangenten in ihnen an die Bahnkurven, geschnitten mit den konjugierten,

[2]) Das in der angeführten Arbeit Strömgrens verwendete Koordinatensystem ist hier längs der x-Achse um $+1$ verschoben gedacht. Was dort mit r_1 und r_2 bezeichnet ist, heißt hier r und r_2.

bestimmen dann die Brennpunkte der Bahnkurven, soweit sie nicht mit den festen Massen zusammenfallen. Geometrisch sind diese Punkte (für jede Bahnkurve im allgemeinen andere) dadurch ausgezeichnet, daß sie zu Paaren geordnet sind und in dieser Zuordnung einander als Schwarzsche Spiegelbilder sowohl bezüglich der Hillschen Grenzkurve, als auch der zugehörigen Bahnkurve entsprechen, wie ich hier nicht näher ausführen kann. (Vgl. Study, Ebene analytische Kurven und dazugehörige Abbildungen. Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Heft I.) Ich erwarte zuversichtlich, daß sich aus diesem Zusammenhang eine geometrische Erkenntnis über die Librationszentra wird gewinnen lassen, und würde mich sehr freuen, wenn da jemandem etwas gelänge ...

(Eingegangen am 3. Juli 1923.)

Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

3. Mitteilung.

Es sei

$$\vartheta(z) = z^{(1)} \tag{1}$$

eine für

$$-H \leqq z \leqq H \tag{2}$$

$m + 1$ mal stetig differentiierbare Funktion, wo $m \geqq 1$ ist, es sei ferner

$$\vartheta(0) = 0, \quad 0 < \vartheta'(0) = S < 1, \tag{3}$$

$$z^{(\nu)} = \vartheta(z^{(\nu-1)}), \qquad z^{(0)} = z. \tag{4}$$

Wir betrachten die Funktionalgleichung

$$\text{I} \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda^k a_k(z) f(z^{(k)}) = g(z),$$

in welcher λ ein Parameter ist, während $a_k(z)$ und $g(z)$ gegebene, m mal stetig differentiierbare Funktionen sind. Die Funktion $f(z)$ ist zu bestimmen.

Aus den Untersuchungen von § 1 geht hervor, daß man I in eine lineare Differenzengleichung überführen kann; da aber die gewünschten Resultate sich nicht direkt aus den früheren ergeben, so empfiehlt sich eine direkte Behandlung von I bzw. I′ (siehe § 1). Wir charakterisieren unter entsprechender Einschränkung von $g(z)$ die Lösung durch eine Grenzbedingung; es tritt dabei an Stelle der Hilfsdifferentialgleichung bei Differenzengleichungen die eigenartige Hilfsfunktionalgleichung (43). Dann untersuchen wir unter Aufhebung der Einschränkung von $g(z)$ den Charakter der Lösung als Funktion von λ; wir kommen dabei zu umso präziseren Resultaten, je größer m ist. Für $m = \infty$ können wir die singulären Stellen in bezug auf λ explizit angeben, speziell also, wenn die gegebenen

Funktionen in der Umgebung von $z = 0$ regulär analytisch sind. In diesem letzteren Falle wird unsere Lösung die in der Umgebung von $z = 0$ reguläre Lösung von I und läßt sich durch Ansetzen einer Potenzreihe in bezug auf z mit unbestimmten Koeffizienten direkt bestimmen. Auf diese Weise hat Grévy[1]) für $g(z) - 0$ in diesem letzteren Fall die allenfallsigen in $z = 0$ regulären Lösungen direkt bestimmt.

Entsprechende Untersuchungen wie in der vorliegenden Arbeit lassen sich durchführen, wenn man statt z mehrere Variable betrachtet oder z verschiedenen Transformationen des Typus (1) unterwirft. Diese Verallgemeinerung entspricht derjenigen unserer früheren Untersuchungen auf Differenzengleichungen mit mehreren unabhängigen Variablen oder auf solche, bei denen z um verschiedene Größen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ vermehrt wird. Man erhält bei den Differenzengleichungen als Hilfsdifferentialgleichung eine partielle Differentialgleichung, deren Integral durch die Forderung, sich an bestimmten singulären Stellen regulär zu verhalten, eindeutig festgelegt wird. Entsprechend kommt man im vorliegenden Falle auf die Verallgemeinerung der Hilfsfunktionalgleichung (43) für mehrere Variable $u_1, u_2, \ldots$.

§ 1.

Die Sätze von Koenigs[2]).

Es sei

$$(5) \quad z^{(1)} = \vartheta(z) = Sz(1 + z\gamma(z)) = z\gamma_1(z), \qquad \frac{dz^{(1)}}{dz} = S(1 + z\gamma_2(z)),$$

wobei wir uns in (2) H so klein gewählt denken, daß auch

$$(6) \quad |\gamma(z)| < M_1, \quad |\gamma_2(z)| < M_2, \quad |\gamma_1(z)| \leqq K < 1$$

ist, wo M_1 und M_2 feste endliche Größen sind.

Dann ist für Größen z, die (2) genügen,

$$(7) \quad |z^{(\nu)}| \leqq K^\nu z,$$

$$(8) \quad z^{(\nu+1)} = z^{(\nu)} S(1 + z^{(\nu)}\gamma(z^{(\nu)})) = S^{\nu+1} z \prod_{\varrho=0}^{\nu} (1 + z^{(\varrho)}\gamma(z^{(\varrho)})).$$

Es existiert daher nach (6) und (7)

$$(9) \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{z^{(\nu+1)}}{S^{\nu+1}} = z \prod_{\varrho=0}^{\infty} (1 + z^{(\varrho)}\gamma(z^{(\varrho)})) = B(z),$$

[1]) A. Grévy, Étude sur les équations fonctionnelles, Paris, Thèse 1894.

[2]) G. Koenigs, Recherches sur les intégrales de certaines équationes fonctionnelles, Ann. Éc. Norm. (3) **1** (1884), Anhang S. 1—41. Daselbst ist $\vartheta(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ regulär analytisch vorausgesetzt.

wobei $B(z)$ für $|z| < H$ stetig und

$$B(0) = 0, \qquad B(z^{(1)}) = S B(z) \tag{10}$$

ist. Des weiteren ist

$$\frac{dz^{(\nu+1)}}{dz^{(\nu)}} = S(1 + z^{(\nu)} \gamma_2(z^{(\nu)})),$$

$$\frac{dz^{(\nu+1)}}{dz} = S^{\nu+1} \prod_{\varrho=0}^{\nu} (1 + z^{(\varrho)} \gamma_2(z^{(\varrho)}) = S^{\nu+1} Z^{(\nu+1)}(z)), \tag{11}$$

also.

$$\frac{z^{(\nu+1)}}{S^{\nu+1}} = \int_0^z Z^{(\nu+1)}(z)\, dz, \tag{12}$$

und für $|z| < H$ wegen (6) und (7)

$$B(z) = \int_0^z \prod_{\varrho=0}^{\infty} (1 + z^{(\varrho)} \gamma_2(z^{(\varrho)}))\, dz. \tag{13}$$

$\frac{dB(z)}{dz}$ ist daher stetig. Entsprechend folgt unter Benutzung von (11), daß $B(z)$ m mal stetig differentiierbar ist. Da

$$\left(\frac{dB(z)}{dz}\right)_{z=0} = 1$$

ist, so kann man, wenn in (2) $|H|$ klein genug gewählt ist, z als m mal stetig differentiierbare Funktion von

$$\bar{z} = B(z) \tag{14}$$

darstellen, wobei wegen (10)

$$\bar{z}^{(1)} = S \bar{z} \tag{15}$$

ist. Dann geht I in

$$\text{I}' \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \bar{a}_k(\bar{z}) \bar{f}(S^k z) = \bar{g}(\bar{z})$$

über, wo $\bar{a}_k(\bar{z}) = a_k(z)$, $g(\bar{z}) = g(z)$, $f(\bar{z}) = f(z)$ ist und die Funktionen $\bar{a}_k(\bar{z})$ und $g(\bar{z})$ m mal stetig nach $\bar{z}$ differentiierbar sind.

Als Ergebnis dieses Paragraphen folgt, daß man nach allenfallsiger Umänderung der Bezeichnung von vornherein

$$z^{(1)} = z S, \quad z^{(\nu)} = S^{\nu} z \tag{16}$$

annehmen darf. Führt man $\ln z$ als neue Veränderliche ein, so geht I′ in eine Differenzengleichung über.

§ 2.

Ansatz einer eindeutig bestimmten Lösung.

Wir nehmen also unsere Funktionalgleichung jetzt in der Form

$$\text{I}'' \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda^k a_k(z) f(S^k z) = g(z)$$

an. Es liegt dann nahe, eine Lösung in der Form

$$(17) \qquad f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \varphi_l(z) g(S^l z)$$

anzusetzen, woraus man, die Konvergenz vorausgesetzt, für die Funktionen $\varphi_l(z)$ durch Einsetzen in I'' das Rekursionssystem

$$(18a) \qquad a_0(z)\varphi_0(z) = 1,$$

$$(18b) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k(z)\varphi_{i-k}(S^k z) = 0$$

erhält, wenn $\varphi_j(z) = 0$ für $j < 0$ gesetzt wird.

Es empfiehlt sich aber statt dieses Rekursionssystems ein anderes damit äquivalentes vermittels einer Methode abzuleiten, die sich an die in den früheren Mitteilungen benützte eng anschließt. Wir leiten zu diesem Zwecke aus I'' die unendlich vielen linearen Gleichungen

$$(19) \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda^{k+i} a_k(S^i z) f(S^{k+i} z) = \lambda^i g(S^i z) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

mit den Unbekannten $\lambda^i f(S^i z)$ ab und setzen

$$(20) \qquad \lambda^{k+i} f(S^{k+i} z) = q^{k+i} \zeta_{k+i}, \qquad \lambda^i g(S^i z) = q^i y_i,$$

wobei die positive Größe q durch (50) eingeschränkt ist. Dann geht (19) in

$$(21) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k(S^i z) q^k \zeta_{k+i} = y_i$$

über. Wir nehmen nun an, $\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2$ und $\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i^2$ konvergieren, d. h.: wir machen die Voraussetzung

$$(22) \qquad \overline{\lim_{i \to \infty}} \sqrt[i]{|g(S^i z)|} < \frac{q}{|\lambda|}$$

und wir fordern

$$(23) \qquad \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|f(S^k z)|} \leqq \frac{q}{|\lambda|},$$

wobei wir in (23) das $=$-Zeichen dadurch ausschließen können, daß wir q beliebig wenig vergrößern. (Vgl. die Einschränkung von q in (50)).

Seien nun die Größen x_i beliebig so gewählt, daß $\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 = 1$, so ist, wie wir im § 5 als Hilfssatz 1 beweisen wollen, die Bilinearform

$$(24)\quad \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k(S^i z)q^k x_i \zeta_{k+i} = A(x,\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i}^{i+n} a_{k-i}(S^i z)q^{k-i} x_i \zeta_k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{k+n} a_{l-k}(S^k z)q^{l-k} x_k \zeta_l$$

beschränkt. Die Auflösung des Gleichungssystems (21) ist der Bestimmung einer beschränkten Bilinearform

$$(25)\quad \Psi(\zeta, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \psi_{kl} q^{l-k} \zeta_k y_l$$

äquivalent, wenn

$$(26)\quad A(x,\zeta)\Psi(\zeta, y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=i}^{i+n} a_{k-i}(S^i z)q^{k-i}\psi_{kl} q^{l-k} x_i y_l = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$$

ist, so daß die gesuchten Größen

$$(27)\quad \zeta_k = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{kl} q^{l-k} y_l$$

werden. Wir bestimmen aber statt $\Psi(\zeta, y)$ eine beschränkte Bilinearform

$$(28)\quad \Phi(x,\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{ik} q^{k-i} x_i \zeta_k,$$

so daß

$$(29)\quad \Phi(x,\zeta)A(\zeta, y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{k+n} \varphi_{ik} q^{k-i} a_{l-k}(S^k z)q^{l-k} x_i y_l = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$$

oder

$$(30)\quad \sum_{0\leqq k=l-n}^{l} \varphi_{ik} q^{k-i} a_{l-k}(S^k z)q^{l-k} = \delta_{il} \quad \text{mit} \quad \delta_{ii} = 1,\ \delta_{il} = 0 \text{ für } i \neq l$$

wird. Ausführlicher geschrieben erhält man also, wenn $\varphi_{ij}(z) = 0$ für $j < 0$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
&\varphi_{i0} a_0(z) = \delta_{i0} q^i,\\
&\varphi_{i1} a_0(Sz) + \varphi_{i0} a_1(z) = \delta_{i1} q^{i-1},\\
(31)\quad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_{ir} a_0(S^r z) + \varphi_{ir-1} a_1(S^{r-1} z) + \ldots + \varphi_{ir-n} a_n(S^{r-n} z) = \delta_{ir} q^{i-r}\\
&\qquad\qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),
\end{aligned}$$

d. h. ein Gleichungssystem, dessen linke Seite aus der von (21) durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen dem Wesen nach entsteht. Aus (31) folgt unmittelbar, daß es höchstens eine einzige Bilinearform $\Phi(x, \zeta)$ gibt, da die Größen φ_{ik} durch (31) eindeutig bestimmt sind. Wir beweisen nun auf Grund der Untersuchungen des § 3 im § 5 den Hilfssatz 3, daß wenn q

der Ungleichung (50) genügt, $\Phi(x, \zeta)$ beschränkt ist, sofern, was wir annehmen wollen,

$$a_0(z) \neq 0 \text{ für } |z| < H \tag{32}$$

ist.

Dann gibt es aber[3]) auch eine einzige beschränkte Bilinearform $\Psi(\zeta, y)$ und es ist

$$\Phi(\zeta, y) = \Psi(\zeta, y), \tag{33}$$

also nach (27)

$$\zeta_k = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{kl} q^{l-k} y_l, \tag{34}$$

wobei $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^2$ wegen der Beschränktheit von $\Phi(x, y)$ konvergiert.

Nach (20) wird daher

$$\lambda^k f(S^k z) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{kl} \lambda^l g(S^l z), \tag{35}$$

wobei aber noch zu zeigen ist, daß

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{k+1\,l}(z) \lambda^l g(S^l z) = \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{kl}(Sz) \lambda^l g(S^{l+1} z) \tag{36}$$

ist. Aus (31) folgt aber,

$$\varphi_{k+1\,l}(z) \equiv 0 \text{ für } l < k+1,$$
$$\varphi_{k+1,k+1}(z) = \frac{1}{a_0(S^{k+1} z)} = \varphi_{k,k}(Sz) = \varphi_{00}(S^{k+1} z), \tag{37}$$

$$\varphi_{k+1,k+r}(z) = \varphi_{k,k+r-1}(Sz) = \varphi_{0r-1}(S^{k+1} z) \text{ für } r = 1, 2, \ldots \tag{38}$$

so daß also

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{k+1\,l}(z) \lambda^l g(S^l z) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_{0r-1}(S^{k+1} z) \lambda^{k+r} g(S^{k+r} z)$$
$$= \lambda \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_{0r-1}(S^k Sz) \lambda^{k+r-1} g(S^{k+r-1} Sz) = \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{kl}(Sz) \lambda^l g(S^{l+1} z) \tag{39}$$

wird, wodurch (36) bewiesen ist.

Wir haben also den Satz:

Ist (22) *erfüllt, so hat* I″ *nur die einzige Lösung*

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{0l} \lambda^l g(S^l z), \tag{40}$$

für welche

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|f(S^k z)|} < \frac{q}{|\lambda|} \tag{41}$$

ist.

[3]) Vgl. etwa E. Hilb, Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung, 1. Mitteilung, Math. Ann. 82 (1920), S. 1—39, speziell S. 3—5.

§ 3.

Bestimmung der Bilinearform $\Phi(x, \zeta)$ und der Ungleichung für q.

Wir setzen

$$(42)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{i\nu}(z)\, u^{\nu} = q_i(u), \qquad \varphi_i[a_k(z); u] = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{i\nu}(z)\, a_k(S^{\nu} z)\, u^{\nu},$$

dann genügt $\varphi_i(u)$ der Funktionalgleichung

$$(43)\quad \sum_{k=0}^{n} u^k \varphi_i[a_k(z), u] = u^i.$$

Wir beweisen im § 5 den Hilfssatz 2, daß die durch (42) und (43) festgelegten Potenzreihen $\varphi_i(u)$ einen von Null verschiedenen Konvergenzradius R besitzen, wobei entsprechend (36)

$$(44)\quad \varphi_{i+1}(z, u) = u\, \varphi_i(Sz, u) = u^{i+1} \varphi_0(S^{i+1} z, u)$$

ist. Um R genauer zu bestimmen, setzen wir, da die Funktionen $a_k(z)$ nach Voraussetzung m mal stetig differentiierbar sind,

$$(45)\quad a_k(z) = a_{k0} + a_{k1} z + \ldots + a_{km+1} z^{m-1} + a_{km}(z) z^m,$$

wobei $a_{k0}, a_{k1}, \ldots, a_{km}$ von z unabhängig sind, während $a_{km}(z)$ eine stetige Funktion in z ist und eine Zahl M_3 existiert, daß für alle $|z| < H$,

$$(46)\quad |a_{km}(z)| < M_3 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Dann geht (43) über in

$$(47)\quad \sum_{k=0}^{n} a_{k0} u^k \varphi_i(u) + z \sum_{k=0}^{n} a_{k1} u^k \varphi_i(Su) + \ldots + z^{m-1} \sum_{k=0}^{n} a_{km-1} u^k \varphi_i(S^{m-1} u)$$
$$+ z^m \sum_{k=0}^{n} u^k \varphi_i[a_{km}(z); S^m u] = u^i.$$

Da der Konvergenzradius von $\varphi_i(Su)$ nun RS^{-1}, der von $\varphi_i(S^{m-1} u)$ aber RS^{-m+1} ist, der von $\varphi_i[a_{km}(z); S^m u]$ mindestens gleich RS^m ist, so ist der Konvergenzradius von

$$(48)\quad G_i(u) = \varphi_i(u) \sum_{k=0}^{n} a_{k0} u^k$$

mindestens $\frac{R}{S}$. Die absolut kleinste singuläre Stelle von $\varphi_i(u)$ ist daher ein Pol, an dem $G_i(u)$ sich regulär verhält. Es ist also für diese singuläre Stelle

$$(49)\quad \sum_{k=0}^{n} a_{k0} u^k = 0.$$

Seien $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die dem absoluten Betrage nachgeordneten Wurzeln von (49), dann ist die absolute kleinste singuläre Stelle von $\varphi_i(u)$ unter diesen Zahlen enthalten, wir nennen sie u_r.

Wählen wir also

$$q < u_r \,, \tag{50}$$

so konvergiert die Reihe in (40) und nach Hilfssatz 3 des § 5 ist dann bei dieser Wahl von $q\Phi(x,\zeta)$ beschränkt.

§ 4.

Die singulären Stellen der durch (40) definierten Lösung in bezug auf λ.

Aus (47) folgt weiter:

Die singulären Stellen von $\varphi_i(u)$, deren absoluter Betrag kleiner ist als $|u_r|S^{-m}$, sind unter denjenigen der Zahlen

$$u_r,\ u_r S^{-1},\ \ldots,\ u_r S^{-m+1},$$
$$u_{r+1},\ u_{r+1}S^{-1},\ \ldots,\ u_r S^{-m+1},\ \ldots,\ u_n,\ u_n S^{-1},\ \ldots,\ u_n S^{-m+1} \tag{51}$$

enthalten, deren absoluter Betrag kleiner ist als $|u_r|S^{-m}$.

Das analytische Verhalten von $\varphi_i(u)$ für $|u| \geqq |u_r|S^{-m}$ hängt von dem Charakter der $a_{km}(z)$ ab, wie man sofort sieht, wenn man etwa $a_{km}(z) = 1 + z^{\frac{1}{p}}$ setzt. Es lassen sich also darüber keine allgemeinen genaueren Aussagen machen.

Wir setzen jetzt

$$g(z) = g_0 + g_1 z + \ldots + g_{m-1} z^{m-1} + g_m(z) z^m \,, \tag{52}$$

dann sind die singulären Stellen

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{0l}(z)\, g_k z^k \lambda^l S^{kl} + z^m \sum_{l=0}^{\infty} g_m(S^l z)\, \varphi_{0l}(z) \lambda^l S^{ml} \,, \tag{53}$$

deren absoluter Betrag $|u_r|S^{-m}$ nicht übersteigt, unter denjenigen der Zahlen (51) enthalten, die derselben Einschränkung unterworfen sind. Ist also speziell m beliebig groß wählbar, so sind die singulären Stellen von (40) in bezug auf λ unter den Zahlen

$$u_\varrho S^{-\tau} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, n;\ \tau = 0, 1, 2, \ldots) \tag{54}$$

enthalten.

§ 5.

Beweis der Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Es ist für $|z| < H$, $|a_k(z)| < M_4$ für $k = 0, 1, \ldots, n$, wenn M_4 geeignet gewählt ist. Daher ist nach (24)

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(S^i z)\, q^k x_i \zeta_{k+i}\right|$$
$$= |A(x,\zeta)| < M_4 \sum_{k=0}^{n} q^k \sum_{i=0}^{\infty} |x_i \zeta_{k+i}| \leqq M \sum_{k=0}^{n} q^k \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{55}$$

woraus folgt, daß $A(x,\zeta)$ beschränkt ist

Hilfssatz 2. Es sei für $|z| < H$ $a_0(z)| < M_5$ (vgl. (32)); wir bilden dann die Majorante

$$\bar{\varphi}_i(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\varphi}_{i\nu} u^\nu, \tag{56}$$

wobei, wenn $\bar{\varphi}_{ij} \equiv 0$ für $j < 0$

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi}_{i0} M_5 = \delta_{i0} q^i, \\ &\bar{\varphi}_{i1} M_5 = \delta_{i1} q^{i-1} + M_4 \bar{\varphi}_{i0}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\bar{\varphi}_{ir} M_5 = \delta_{ir} q^{i-r} + M_4 (\bar{\varphi}_{ir-1} + \bar{\varphi}_{ir-2} + \ldots + \bar{\varphi}_{ir-n}) \; (r = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned} \tag{57}$$

ist, so daß also

$$M_5 \bar{\varphi}_i(u) = u^i + M_4 (u + u^2 + \ldots + u^n) \bar{\varphi}_i(u), \tag{58}$$

$$\bar{\varphi}_i(u) = \frac{u^i}{M_5 - M_4 (u + u^2 + \ldots + u^n)} \tag{59}$$

wird. Damit ist gezeigt, daß die Potenzreihe für $\varphi_i(u)$ sicher einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat.

Zusatz. In dem Konvergenzkreis von $\bar{\varphi}_i(u)$ konvergiert $\varphi_i(u)$ gleichmäßig in z, sofern $|z| \leqq H$ ist, $\varphi_i(u)$ ist also in diesem Kreise eine stetige Funktion von z und dieses gilt infolge der Funktionalgleichung (43) für $|u| < |u_r|$. Wird also die positive Größe δ so gewählt, daß entsprechend (50) $q + \delta < |u_r|$ wird, so gibt es für alle z, sofern $|z| \leqq H$ ist, eine feste Größe M_6, daß

$$|\varphi_{ik}(z)| < \frac{M_6}{(q+\delta)^k} \tag{60}$$

wird.

Hilfssatz 3. Es ist nach (37) und (38)

$$\begin{aligned} \Phi(x, \zeta) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{ik}(z) q^{k-i} x_i \zeta_k = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \varphi_{0\,k-i}(S^i z) q^{k-i} x_i \zeta_k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{0k}(S^i z) q^k x_i \zeta_{k+i}, \end{aligned} \tag{61}$$

also

$$\begin{aligned} |\Phi(x, \zeta)| &\leqq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M_6 \frac{q^k}{(q+\delta)^k} |x_i \zeta_{k+i}| \\ &\leqq \sum_{k=0}^{\infty} M_6 \frac{q^k}{(q+\delta)^k} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{62}$$

woraus folgt, daß $\Phi(x, \zeta)$ beschränkt ist.

(Eingegangen am 13. Juli 1923.)

Die charakteristischen Eigenschaften des logarithmischen Potentials.

Von

W. Sternberg in Heidelberg.

Bekannt sind die zuerst von Dirichlet angegebenen charakteristischen Eigenschaften des Newtonschen Potentials[1])

$$V(x,y,z)=\iiint \frac{\varrho}{r}\,dz \quad \iiint \frac{\varrho(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Die Kenntnis solcher Eigenschaften ist von großem Wert und gestattet die mannigfachsten Anwendungen. Erwähnt sei nur die berühmte Aufgabe der Darstellung des Potentials eines homogenen Ellipsoids, welche bei Benutzung der Dirichletschen Methode auf verblüffend einfache Art gelöst wird.

Es dürfte nun nicht unwichtig sein, charakteristische Eigenschaften auch für das logarithmische Potential zu finden. Das ist zwar nicht schwer, scheint aber bisher noch nicht geschehen zu sein. Eine gewisse Schwierigkeit macht das Verhalten des logarithmischen Potentials im Unendlichen. Es benimmt sich dort nicht so einfach wie das Newtonsche; letzteres wird 0, ersteres aber beliebig groß. Unter Überwindung dieser Schwierigkeit gelangt man zu folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen, wobei (III) die notwendige Modifikation im Vergleich mit dem Newtonschen Potential darstellt:

Für das logarithmische Potential einer Fläche

$$V(x,y)=\iint \varrho \log\frac{1}{r}\,df=\iint \varrho(\xi,\eta)\log\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta,$$

[1]) Vgl. Wangerin: Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, **1**, Leipzig 1909, S. 98 ff., sowie S. 165 ff.; Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, **1**. Braunschweig 1900, 11. und 12. Abschnitt, § 105.

worin ϱ eine Funktion bedeutet, welche nebst ihren ersten Ableitungen $\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}, \frac{\partial \varrho}{\partial \eta}$ in der ganzen Ebene stückweise stetig[2]), doch nur in einem endlichen Teile derselben von 0 verschieden ist, sind charakteristisch die Eigenschaften:

(I) V und die ersten Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ sind überall stetig.

(II) Die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ sind außerhalb der Unstetigkeitslinien von ϱ, $\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \varrho}{\partial y}$ stetig und genügen der Gleichung $\Delta V = -2\pi\varrho$.

(III) Bei Benutzung von Polarkoordinaten $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ gilt gleichmäßig in φ für $R \to \infty$ $\lim\left(V + R\log\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R}\right) = 0$ und $R\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|$ unter einer von R unabhängigen Schranke, wenn mit $\frac{\partial V}{\partial s}$ die Ableitung in einer beliebigen Richtung s bezeichnet wird[3]).

Für das logarithmische Potential einer Linie C von einfacher Belegung

$$V = \int_C \varkappa \log\frac{1}{r}\, dl,$$

worin $\varkappa$ eine stetige Funktion des Ortes auf C ist, hat man als charakteristische Eigenschaften:

(I) V, $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ sind außerhalb C stetig, beim Durchgange durch C ist

$$V_1 - V_2 = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = -2\pi\varkappa.$$

(II) Auch $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ sind außerhalb C stetig und genügen der Gleichung $\Delta V = 0$.

(III) Wie oben.

Dabei unterscheidet man die beiden Seiten von C in beliebiger Weise als 1 und 2, versteht unter $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der von 2 auf 1 gerichteten Normalen und bezeichnet die Grenzwerte der Funktionswerte

[2]) Eine Funktion heißt in irgendeinem Gebiete S stückweise stetig, wenn S durch eine endliche Anzahl von Kurven C in eine endliche Anzahl von Teilgebieten zerlegt werden kann, derart, daß die Funktion in jedem Teilgebiete mit Einschluß der Begrenzung völlig stetig ist, während die Kurven C Unstetigkeitslinien darstellen, indem die Funktion beim Durchgange durch diese Sprünge macht. Alle auftretenden Kurven mögen der Einfachheit halber als stetig gekrümmt angenommen werden.

[3]) Man kann der Bedingung (III) auch andere Formen geben; doch scheint die hier gewählte am handlichsten zu sein.

mit den Indizes 1 oder 2, je nachdem man sich von der einen oder von der andern Seite her einem Punkte von C nähert.

Für das logarithmische Potential einer doppelt belegten Kurve C schließlich

$$V = \int_C \mu \frac{\partial}{\partial n} \log\left(\frac{1}{r}\right) dl,$$

wo μ eine stetige Funktion des Ortes ist, bekommt man:

(I) V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ außerhalb C stetig; $V_1 - V_2 = 2\pi\mu$, $\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = 0$.

(II) und (III) wie oben.

Wir beginnen mit dem Nachweis der Notwendigkeit der Bedingungen und können uns hier, da die Notwendigkeit von (I) und (II) sowie des zweiten Teils von (III) bekannt ist, auf die Limesgleichung

$$\lim_{R=\infty}\left(V - R \log R \frac{\partial V}{\partial R}\right) = 0$$

beschränken.

Was zunächst das Flächenpotential $V = \iint \varrho \log \frac{1}{r} df$ betrifft, wo ϱ nur in einem endlichen Gebiete S von 0 verschieden ist, so muß man folgende Umformung vornehmen

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = R\sqrt{1-\delta},$$

dabei ist

$$\delta = \frac{2(x\xi + y\eta) - (\xi^2 + \eta^2)}{R^2} = \frac{2(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi)}{R} - \frac{\xi^2+\eta^2}{R^2}.$$

Offenbar wird $\lim_{R=\infty} \delta = 0$ und zwar gleichmäßig für alle (ξ, η) aus S und alle φ aus dem Intervalle $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Ferner erhält man

$$\log r = \log R + \frac{1}{2}\log(1-\delta)$$
$$= \log R - \frac{1}{2}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + \dots\right),$$

und die Reihe konvergiert bei genügend großem R absolut und gleichmäßig für alle zulässigen ξ, η, φ. Es folgt

$$V = \log\frac{1}{R}\iint \varrho\, df + \frac{1}{2}\iint \varrho\left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \dots\right) df$$

oder

$$V = M \log\frac{1}{R} + W.$$

Dabei ist $M = \iint \varrho\, df$ eine Konstante, nämlich die Gesamtmasse, und

$$W = \frac{1}{2}\iint \varrho\left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \dots\right) df.$$

Für W ergibt sich, wenn O und nachher o das bekannte Bachmannsche bzw. Landausche Symbol ist, unmittelbar

$$W = O\left(\frac{1}{R}\right),$$

gleichmäßig in φ. Ferner wird

$$\frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{M}{R} + \frac{\partial W}{\partial R}$$

und

$$\frac{\partial W}{\partial R} \quad O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

gleichmäßig in φ. Da nun

$$V + R \log \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} = W + R \log \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R}$$

ist, so findet man tatsächlich gleichmäßig in φ

$$V + R \log \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} = O\left(\frac{1}{R}\right) + O\left(\frac{\log R}{R}\right) = o(1),$$

w. z. b. w.

Genau so gestaltet sich der Nachweis beim Linienpotential einer einfachen Belegung.

Das logarithmische Potential einer doppelt belegten Linie endlich verhält sich im Unendlichen wie das Newtonsche Potential einer einfach belegten Linie, da ja

$$V = \int \mu \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{r}\, dl = -\int \mu \frac{\cos(r,n)}{r}\, dl$$

gesetzt werden kann. Es ist also $\lim_{R=\infty} V = 0$ und $R^2 \left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|$ beschränkt. Jedenfalls gilt dann auch die obige Limesgleichung.

Nun ist zu zeigen, daß die angegebenen Bedingungen auch hinreichend für die drei Potentiale sind.

Dazu braucht man die Greensche Formel, welche für ein Gebiet S, das von einer stetig gekrümmten Kurve L begrenzt wird, lautet

$$\iint_S (U \Delta V - V \Delta U)\, df = -\int_L \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dl.$$

Dabei sind U und V nebst ersten Ableitungen in S mit Einschluß des Randes L stetig, während von den zweiten Ableitungen nur stückweise Stetigkeit angenommen zu werden braucht: ferner ist $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der inneren Normale von L. Nimmt man für U die Funktion

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

wo (x, y) ein innerer Punkt von S ist, so hat man einen bekannten Grenzübergang auszuführen, und gestattet man, daß die Funktion V und ihre ersten Ableitungen längs gewisser Kurven C endliche Sprünge machen, was auf stückweise Stetigkeit hinauskommt, so treten zu dem Linienintegral über L noch die entsprechenden Integrale über C hinzu. Die Greensche Identität lautet dann in der für unsere Zwecke passenden Form

$$\iint_S \log\frac{1}{r}\,\Delta V\,df + \int_L \left(\log\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\right)dl$$

$$+\int_C \log\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n}\right)dl - \int_C (V_1 - V_2)\,\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,dl = -2\pi V.$$

Ist nun V nebst Ableitungen in der ganzen unendlichen Ebene stückweise stetig, so kann man für L einen Kreis K um den Ursprung mit beliebig großem Radius R nehmen. Erfüllt ferner V die Bedingung (III), so konvergiert das Integral $\int_L \ldots$, d. h. $\int_K \ldots$ mit wachsendem R gegen 0. Wir zeigen etwas allgemeiner, daß für irgend zwei Funktionen U und V, welche beide den Bedingungen (III) genügen, stets

$$\lim_{R=\infty} \int_K \left(U\,\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial U}{\partial n}\right)dl = 0$$

ist. Man hat nämlich

$$\int_K \ldots = -\int_0^{2\pi} \left(U\,\frac{\partial V}{\partial R} - V\,\frac{\partial U}{\partial R}\right)R\,d\varphi,$$

aber

$$U = R\log R\,\frac{\partial U}{\partial R} + U_1, \qquad V = R\log R\,\frac{\partial V}{\partial R} + V_1,$$

wo in φ gleichmäßig $\lim_{R=\infty} U_1 = 0$, $\lim_{R=\infty} V_1 = 0$ gilt. Mithin ist

$$\int_K \ldots = -\int_0^{2\pi} \left(U_1\,\frac{\partial V}{\partial R} - V_1\,\frac{\partial U}{\partial R}\right)R\,d\varphi$$

und $\lim U_1 R\,\frac{\partial V}{\partial R} = 0$, $\lim V_1 R\,\frac{\partial U}{\partial R} = 0$, wenn man noch die Beschränktheit von $R\left|\frac{\partial U}{\partial R}\right|$ und $R\left|\frac{\partial V}{\partial R}\right|$ berücksichtigt. Also ist in der Tat $\lim \int_K \ldots = 0$, w. z. b. w.

Die Greensche Formel nimmt jetzt die Gestalt an:

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_S \log\frac{1}{r}\,\Delta V\,df - \frac{1}{2\pi}\int_C \log\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n}\right)dl$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_C (V_1 - V_2)\,\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,dl = V,$$

wo das Doppelintegral über die ganze Ebene zu erstrecken ist. Aus dem bloßen Anblick dieser Identität ergibt sich aber, daß V bestimmt ist, sobald man die Werte von ΔV in der ganzen Ebene, sowie von $V_1 - V_2$ und $\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n}$ auf C kennt.

Wir sind also am Ziele. Ist nämlich V nebst ersten Ableitungen völlig, nicht bloß stückweise stetig, so treten keine Kurven C auf, und nimmt man noch $\Delta V = -2\pi\varrho$, so wird $V = \iint_S \varrho \log \frac{1}{r}\, df$. Zeigt aber entweder $\frac{\partial V}{\partial n}$ oder V selbst beim Durchgange durch C ein unstetiges Verhalten gemäß einer der beiden Formeln $\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = -2\pi\varkappa$ oder $V_1 - V_2 = 2\pi\mu$, während andererseits $\Delta V = 0$ ist, so ergibt sich $V = \int_C \varkappa \log \frac{1}{r}\, dl$ oder $V = \int_C \mu \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{r}\, dl$.

Damit ist der Beweis vollendet.

(Eingegangen am 16. Juli 1922.)

Zusatzbemerkung.

Herr Professor Lichtenstein war so freundlich, mich darauf aufmerksam zu machen, daß die bei den Linienpotentialen auftretenden Bedingungen

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = -2\pi\varkappa \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = 0$$

eine etwas schärfere Präzisierung erfordern. Diese Bedingungen sollen nicht die implizite Auffassung enthalten, daß $\frac{\partial V_1}{\partial n}$ und $\frac{\partial V_2}{\partial n}$ auf C existieren und stetig sein müssen. (Dies brauchte nämlich bei dem Potential einer Doppelbelegung nicht zuzutreffen, sondern nur bei dem einer einfachen Belegung.) Sie sollen vielmehr so verstanden werden, daß die Limesgleichungen gelten

$$\lim_{h=0} \left[\frac{\partial V(x_1, y_1)}{\partial n} - \frac{\partial V(x_2, y_2)}{\partial n} \right] = -2\pi\varkappa$$

bzw.

$$\lim_{h=0} \left[\frac{\partial V(x_1, y_1)}{\partial n} - \frac{\partial V(x_2, y_2)}{\partial n} \right] = 0,$$

wenn (x_1, y_1) und (x_2, y_2) Punkte darstellen, die auf der Normalen eines Punktes von C in der Entfernung h von diesem Punkte zu beiden Seiten liegen.

(Eingegangen am 27. Juli 1923.)

Preisausschreibung.

Die mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse der Akademie der Wissenschaften in Wien schreibt einen Preis aus für das Thema:

Fiktionen in der Mathematik.

Die Anregung zu dieser Preisausschreibung ging aus von der Gesellschaft der Freunde der Philosophie des „Als Ob" in Halle, welche zu diesem Zweck einen Betrag von rund einer Million Mark zur Verfügung gestellt hat. Die Preissumme wird in einer gegen Kursverlust möglichst gesicherten Form in der Reichsbankstelle in Halle deponiert.

Erläuterung.

Die Philosophie des „Als Ob" hat zu erweisen gesucht, daß die mathematischen Begriffe und Methoden in beträchtlichem Umfang mit Fiktionen durchsetzt sind, d. h. mit bewußt falschen aber zweckmäßigen Annahmen. Die Entstehung dieser Philosophie liegt nun fast 50 Jahre weit zurück und die Problemlage hat sich inzwischen bedeutend verändert. Eine neuerliche Untersuchung des ganzen Fragenkomplexes erscheint daher sowohl für Mathematik als Philosophie wertvoll.

Das Thema der Fiktionen in der Mathematik ist so ausgedehnt und läßt sich unter so verschiedenen Gesichtspunkten behandeln, daß die Freiheit seiner Behandlung in keinem Sinne beschränkt werden soll. Für die Beurteilung einer Arbeit wird maßgebend sein, daß durch sie unsere Kenntnis und Einsicht in die philosophischen Fragen, die sich auf die Mathematik und ihre Methoden beziehen, oder zu denen die Mathematik Anlaß gibt, gefördert wird. Von diesem Standpunkt aus wäre auch eine mehr historische oder historisch-kritische Bearbeitung des Themas zu werten.

Bestimmungen.

Die Bewerbungsschriften sind an die Kanzlei der Akademie der Wissenschaften in Wien, I., Universitätsplatz 2, einzusenden.

Die Ablieferungsfrist ist der 31. Dezember 1925.

Die Arbeiten müssen in deutscher Sprache abgefaßt werden.

Eine ausführliche Bekanntmachung über diese Preisausschreibung wird auf Wunsch von der Kanzlei der Akademie der Wissenschaften in Wien kostenlos und franko zur Verfügung gestellt.

Berichtigung.

Wie ich nachträglich bemerkt habe, steht die im § 4, b) angeführte Eigenschaft der Blaschkeschen Funktion schon in der unter [21]) zitierten Arbeit von Schur, S. 133—134. Dagegen steht der im § 4, c) bewiesene und für den Fall $\delta = 2$ Herrn Schur zugeschriebene Satz bei ihm nicht; derselbe folgt unmittelbar aus einem Resultat von Szegö, l. c. [3]), S. 241.

F. Riesz.

(Eingegangen am 1. Oktober 1923.)

Korrektur zu H. Weyl, Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe, Math. Zeitschr. **17**, S. 293—320.

Beim Reindruck sind eine Reihe Akzente in den Schemata (11), (16), (23) ausgefallen. In (11) und (23) sollen rechts von der Hauptdiagonale alle Zeichen der 2., 4. und 6. Zeile den Akzent tragen, links von der Hauptdiagonale die 1., 3. und 5. Spalte. In der letzten Spalte von (16) muß das obere der beiden μ_3 akzentuiert werden. An anderen Stellen des Textes wird der Leser die gleiche Korrektur ohne Zweifel von sich aus vornehmen.